Exercice| [1767] | 1| Sommes

Soit n un entier naturel non nul.

(1). En remarquant que $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, calculer $S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$.

(2). Sur le même principe, calculer $S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$.

Pistes de réflexion

(1). Il suffit de sommer membre à membre l'égalité proposée pour voir apparaître dans le membre de gauche une somme téléscopique, et dans le membre de droite, par linéarité du symbole $\sum$, on récupère la somme cherchée.

(2). Il suffit de s'inspirer de ce qui précède en partant de $(k+1)^4 - k^4 = \ldots$.

Éléments de correction

(1). Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$, par sommation de ces égalités, on obtient : $\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(3k^2 + 3k + 1\right)$

Par suite, par linéarité de la somme on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

Par ailleurs par téléscopage des termes, on a : $\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) = (n+1)^3 - 1^3$

Finalement on a donc : $(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$

ce qui permet d'écrire que : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - 1 - 3\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1\right]$

Or on a :

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 - 1 - 3\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 &= (n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - 1 \times (n-1+1) \\
&= (n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n \\
&= (n+1)\left[(n+1)^2 - \frac{3}{2}n - 1\right] \\
&= (n+1) \times \frac{2(n+1)^2 - 3n - 2}{2} \\
&= (n+1) \times \frac{2\left(n^2 + 2n + 1\right) - 3n - 2}{2} \\
&= (n+1) \times \frac{2n^2 + n}{2} \\
&= (n+1) \times \frac{n\,(2n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}
\end{aligned}$$

et finalement, il vient que : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(2). On remarque que : $\forall k \in \mathbb{N},\ (k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$.
Par sommation de ces égalités et linéarité de la somme, il vient :

$$\sum_{k+1}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right) = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

Par téléscopage des termes, on a : $\sum_{k+1}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right) = (n+1)^4 - 1^4$

On en déduit donc que : $(n+1)^4 - 1 = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$

ce qui permet d'écrire que : $\sum_{k+1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}\left[(n+1)^4 - 1 - 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1\right]$

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned}
&(n+1)^4 - 1 - 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\
=\ &(n+1)^4 - 1 - 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \times \frac{n(n+1)}{2} - 1 \times n \\
=\ &(n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n \\
=\ &(n+1)\left[(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1\right] \\
=\ &(n+1)\left[(n+1)^3 - (2n+1)(n+1)\right] \\
=\ &(n+1)^2\left[(n+1)^2 - (2n+1)\right] \\
=\ &(n+1)^2 n^2
\end{aligned}$$

ce qui permet d'avoir que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{1}{4} \times n^2(n+1)^2 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$