Exercice| [1733] | 1| Propriétés algébriques

Exprimer en fonction de $\ln(3)$, $\ln(2)$ et $\ln(5)$:

(1). $\ln(12)$
(2). $\ln(18)$
(3). $\ln(96)$
(4). $\ln(432)$
(5). $\ln\left(\frac{198}{243}\right)$
(6). $\ln\left(\frac{192}{108}\right)$
(7). $\ln(15)$
(8). $\ln(24)$
(9). $\ln(30)$
(10). $\ln(120)$
(11). $\ln\left(\frac{27}{10}\right)$
(12). $\ln\left(\frac{75}{256}\right)$

Pistes de réflexion

Pour chacun des logarithmes proposés, il s'agira :

- de décomposer chaque nombre pour lequel on évalue le logarithme sous forme d'un produit de puissances de 2, 3 ou 5 ;
- puis d'utiliser les propriétés opératoires de la fonction ln.

Éléments de correction

(1). Puisque $12 = 2^2 \times 3$, on en déduit que : $$\begin{aligned}\ln(12) &= \ln\left(2^2 \times 3\right) \\ &= \ln\left(2^2\right) + \ln(3) \\ &= 2\ln(2) + \ln(3)\end{aligned}$$

(2). Puisque $18 = 2 \times 3^2$, on en déduit que : $$\begin{aligned}\ln(18) &= \ln\left(2 \times 3^2\right) \\ &= \ln(2) + \ln\left(3^2\right) \\ &= \ln(2) + 2\ln(3)\end{aligned}$$

(3). Puisque $96 = 2^5 \times 3$, on en déduit que : $$\begin{aligned}\ln(96) &= \ln\left(2^5 \times 3\right) \\ &= \ln\left(2^5\right) + \ln(3) \\ &= 5\ln(2) + \ln(3)\end{aligned}$$

(4). Puisque $432 = 2^4 \times 3^3$, on en déduit que : $$\begin{aligned}\ln(432) &= \ln\left(2^4 \times 3^3\right) \\ &= \ln\left(2^4\right) + \ln\left(3^3\right) \\ &= 4\ln(2) + 3\ln(3)\end{aligned}$$

(5). Puisque $198 = 2 \times 3^2$ et $243 = 3^5$, on en déduit que :
$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{198}{243}\right) &= \ln\left(\frac{2 \times 3^2 \times 11}{3^5}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2 \times 11}{3^3}\right) \\ &= \ln(2) + \ln(11) - \ln\left(3^3\right) \\ &= \ln(2) + \ln(11) - 3\ln(3)\end{aligned}$$

(6). Puisque $192 = 2^6 \times 3$ et $108 = 2^2 \times 3^3$, on en déduit que :
$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{192}{108}\right) &= \ln\left(\frac{2^6 \times 3}{2^2 \times 3^3}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2^4}{3^2}\right) \\ &= \ln\left(2^4\right) - \ln\left(3^2\right) \\ &= 4\ln(2) - 2\ln(3)\end{aligned}$$

(7). Puisque $15 = 3 \times 5$, on en déduit que : $$\begin{aligned}\ln(15) &= \ln(3 \times 5) \\ &= \ln(3) + \ln(5)\end{aligned}$$

(8). Puisque $24 = 2^3 \times 3$, on en déduit que : $$\begin{aligned}\ln(24) &= \ln\left(2^3 \times 3\right) \\ &= \ln\left(2^3\right) + \ln(3) \\ &= 3\ln(2) + \ln(3)\end{aligned}$$

(9). Puisque $30 = 2 \times 3 \times 5$, on en déduit que : $$\begin{aligned}\ln(30) &= \ln(2 \times 3 \times 5) \\ &= \ln(2) + \ln(3) + \ln(5)\end{aligned}$$

(10). Puisque $120 = 2^3 \times 3 \times 5$, on en déduit que : $$\begin{aligned}\ln(120) &= \ln\left(2^3 \times 3 \times 5\right) \\ &= \ln\left(2^3\right) + \ln(3) + \ln(5) \\ &= 3\ln(2) + \ln(3) + \ln(5)\end{aligned}$$

(11). Puisque $27 = 3^3$ et $10 = 2 \times 5$, on en déduit que :
$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{27}{10}\right) &= \ln\left(\frac{3^3}{2 \times 5}\right) \\ &= \ln\left(3^3\right) - \ln(2 \times 5) \\ &= 3\ln(3) - (\ln(2) + \ln(5)) \\ &= 3\ln(3) - \ln(2) - \ln(5)\end{aligned}$$

(12). Puisque $75 = 3 \times 5^2$ et $256 = 2^8$, on en déduit que :
$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{75}{256}\right) &= \ln\left(\frac{2 \times 5^2}{2^8}\right) \\ &= \ln\left(\frac{5^2}{2^7}\right) \\ &= \ln\left(5^2\right) - \ln\left(2^7\right) \\ &= 2\ln(5) - 7\ln(2)\end{aligned}$$