Exercice| [1512] | 1| Développements limités

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;1[\setminus\{0\}$ par : $\quad f(x)=\dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}$.

(1). Déterminer la limite en 0 de f. Qu'en conclure pour f ?

(2). (a). Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $\ln(1+x)$.

(b). En déduire que f est dérivable en 0, puis que $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

Pistes de réflexion

(1). Il est fort possible que la limite trouvée soit une limite finie, et par suite que f soit prolongeable par continuité en 0.

(2). (a). On récite son cours...

(b). La difficulté est de gérer le $DL_2\,(0)$ de $x\longmapsto\dfrac{1}{\ln(1-x)}$ qu'il faudra réaliser à un ordre suffisant pour que la simplification par x nécessaire permette de conserver un ordre 2 dans le développement limité.
On sait que f est dérivable en 0 si, et seulement si, f admet un $DL_1\,(0)$, ce qui sera le cas puisqu'on aura au préalable obtenu un $DL_2\,(0)$. Le nombre dérivé de f en 0 est alors le coefficient du terme de degré 1 du $DL_2\,(0)$ obtenu.

Éléments de correction

(1). On sait que $\ln(1-x)\underset{x\to0}{\sim}-x$ et par suite que $f(x)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{-x}{(1-x)\times(-x)}=\dfrac{1}{1-x}$;

Or $\dfrac{1}{1-x}\underset{x\to0}{\longrightarrow}1$ par quotient, donc $f(x)\underset{x\to}{\longrightarrow}1$.
Par conséquent f admet une limite finie en 0, et elle est donc prolongeable par continuité en 0 par la valeur $f(0)=1$ si l'on nomme encore f ce prolongement.

(2). (a). On a :

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\ln(1-x)} &= \frac{x}{-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\underset{x\to0}{o}(x^3)}\\
&= \frac{1}{-1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+\underset{x\to0}{o}(x^2)}\\
&= -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right)}\\
&\underset{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\underset{x\to0}{o}(x^2)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0}{=} -\left(1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right)\\
&= -\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right)\\
&= -1+\frac{x}{2}+\frac{1}{12}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1-x}\times\frac{-x}{\ln(1-x)}\\
&= -\left[1+x+x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right]\left[-1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right]\\
&= -\left[-1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-x+\frac{x^2}{2}-x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)\right]\\
&= 1+\frac{1}{2}x+\frac{5}{12}x^2+\underset{x\to0}{o}(x^2)
\end{aligned}$$

f admettant un $DL_2\,(0)$, elle admet par troncature un $DL_1\,(0)$, ce qui par théorème assure le caractère dérivable de f en 0 avec notamment $f'(0)=\dfrac{1}{2}$ puisque c'est le coefficient du terme de degré 1 de ce $DL_1\,(0)$.