Exercice| [1511] | 1| Développements limités

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

**(1).** Calculer la limite de $f$ en $+\infty$.

**(2).** Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x\longmapsto\dfrac{f(x)}{x}$ au voisinage de $+\infty$. En déduire que l'on a :

$$f(x)=x+2+\frac{5}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

**(3).** Déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction $f$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique $\Delta$ dont on donnera une équation, puis préciser la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\Delta$ au voisinage de $+\infty$.

Pistes de réflexion

**(1).** On remarquera dans un premier temps qu'il s'agit d'une forme indéterminée de la forme « $\infty\times 0$ » et on utilisera un développement asymptotique à l'ordre 1 de $x\longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ pour rechercher un équivalent en $+\infty$ de $f(x)$.

**(2).** On éffectue un développement asymptotique en $+\infty$ de $x\longmapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ à un ordre plus élevé, ainsi que celui de $x\longmapsto\dfrac{x^2}{x-1}$ que l'on doit voir comme étant égal à $x\times\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}$

**(3).** Il suffit d'utiliser la partie de degré 1 du résultat précédent pour avoir une équation réduite de l'asymptote recherchée, et la position de la courbe par rapport à cette dernière est alors donnée par le signe du premier terme non nul qui s'en suit.

Éléments de correction

**(1).** On sait que $\dfrac{x^2}{x-1}\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{x^2}{x}=x$, ce qui donne $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

Puisque $\dfrac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on peut écrire que : $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1+\dfrac{1}{x}+\underset{x\to0}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On en déduit donc que $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{x}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$ et donc que $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\underset{x\to+\infty}{\sim}1+\dfrac{1}{x}$.

Par conséquent, $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

Or on a $x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ par produit et donc finalement que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

**(2).** Il est immédiat que : $\forall x\neq 1,\ \dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

Puisque $\dfrac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on peut écrire que : $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}+\underset{x\to0}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-1}&=\frac{x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}\\&=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\\&\underset{\frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0}{=}1+\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x}&=\left[1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^1}\right)\right]\left[1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\underset{x\to0}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\\&=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\\&=1+\frac{2}{x}+\frac{5}{2x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\end{aligned}$$

On en déduit alors que : $f(x)=x+2+\dfrac{5}{2x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

**(3).** De $f(x)=x+2+\dfrac{5}{2x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, on en déduit que $f(x)-(x+2)=\underbrace{\dfrac{5}{2x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0}$

Par conséquent, la droite d'équation $y=x+2$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y=x+2$ est donnée par le signe de $\dfrac{5}{2x}$ au voisinage de $+\infty$, qui y est clairement positif.
Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de son aymptote en $+\infty$.