Exercice| [1510] | 1| Développements limités

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

(1). Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \longmapsto \dfrac{2x^2}{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}$.

(2). En déduire que g est continue et dérivable en 0.

(3). Déterminer la position relative au voisinage de 0 du graphe $\mathcal{C}_g$ de g et de la tangente à $\mathcal{C}_g$ en 0.

Pistes de réflexion

(1). On commencera par faire un $DL_n(0)$ du dénominateur à un ordre pertinent de sorte que la multiplication par $2x^2$ ne fasse pas grossir inutilement l'ordre du $DL_n(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}$.

(2). L'existence d'un $DL_1(0)$ assure la dérivabilité, et comme ici on a déjà un $DL_3(0)$, c'est terminé pour ce point. Pour la continuité, il suffit d'utiliser ce $DL_3(0)$ pour s'assurer que $g(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} g(0)$.

(3). La position de $\mathcal{C}_g$ par rapport à sa tangente en 0 s'obtient à l'aide du signe du premier monôme non nul de degré supérieur ou égal à 2 dans un $DL_n(0)$ à un ordre suffisant.

Éléments de correction

(1). Puisque $-x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, on a que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}} &= \frac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x \to 0}{o}(x^3) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \underset{x \to 0}{o}(x^3)\right)} \\ &= \frac{1}{2x + \frac{x^3}{3} + \underset{x \to 0}{o}(x^3)} \\ &= \frac{1}{2x\left(1 + \frac{x^2}{6} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)\right)} \\ &= \frac{1}{2x} \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)} \\ \frac{x^2}{6} + \underset{x \to 0}{o}(x^2) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad &= \frac{1}{2x}\left[1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)\right] \end{aligned}$$

Ainsi :
$$\begin{aligned} g(x) &= 2x^2 \times \frac{1}{2x}\left[1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)\right] \\ &= x\left[1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)\right] \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \underset{x \to 0}{o}(x^3) \end{aligned}$$

(2). Du $DL_3(0)$ précédent, on en déduit que $g(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ c'est à dire que $g(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} g(0)$ ce qui assure le caractère continu de g en 0.
De plus, puisque g admet un $DL_3(0)$, par troncature, g admet un $DL_1(0)$, ce qui par théorème, assure le caractère dérivable de g en 0.

(3). Toujours du $DL_3(0)$, on en déduit que l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}_0$ à $\mathcal{C}_g$ en 0 est $y = x$, et la position de $\mathcal{C}_g$ par rapport à $\mathcal{T}_0$ est donnée alors par le signe de $-\dfrac{x^3}{6}$ au voisinage de 0.
Puisque $-\dfrac{x^3}{6}$ est positif pour $x \leq 0$ et négatif pour $x \geq 0$, on en déduit que $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{T}_0$ à gauche de 0 et au-dessous à gauche de 0.