Exercice| [1509] | 1| Développements limités

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de : $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{4x} - 1}{x}$

Pistes de réflexion

- Puisque $4x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on peut obtenir le $DL_n(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{4x}$.
- Il faudra aller à un ordre suffisant pour obtenir le $DL_4(0)$ de f pour compenser la division par x dans l'ordre du $DL_n(0)$ obtenu.

Éléments de correction

Puisque $4x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{4x} &= 1 + 4x + \frac{(4x)^2}{2} + \frac{(4x)^3}{6} + \frac{(4x)^4}{24} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\\ &= 1 + 4x + 8x^2 + \frac{32}{3}x^3 + \frac{32}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\end{aligned}$$

Par suite, il vient que :

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{\left[1 + 4x + 8x^2 + \frac{32}{3}x^3 + \frac{32}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right] - 1}{x}\\ &= \frac{4x + 8x^2 + \frac{32}{3}x^3 + \frac{32}{3}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)}{x}\\ &= 4 + 8x + \frac{32}{3}x^2 + \frac{32}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\end{aligned}$$