Exercice| [1508] | 1| Développements limités

Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de : $\quad f : x \longmapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$

Pistes de réflexion

— Il faudra dans un premier temps utiliser le $DL_2\,(0)$ de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ pour obtenir une nouvelle forme pour $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ que l'on devra mettre sous la forme $\sqrt{1+u(x)}$ afin de pouvoir à nouveau utiliser ce $DL_2\,(0)$ pour terminer le $DL_2\,(0)$.

Éléments de correction

On sait que : $\quad \sqrt{1+x} = 1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$

Par suite, on a :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{1+1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)} \\
&= \sqrt{2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)} \\
&= \sqrt{2\left(1+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)} \\
&= \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)} \\
&\underset{\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\xrightarrow[x\to 0]{}0}{=} \sqrt{2}\left(1+\frac{\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}}{2}-\frac{\left(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{16}\right)^2}{8}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right) \\
&= \sqrt{2}\left(1+\frac{x}{8}-\frac{x^2}{32}-\frac{\frac{x^2}{16}}{8}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right) \\
&= \sqrt{2}\left(1+\frac{x}{8}-\frac{x^2}{32}-\frac{x^2}{128}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right) \\
&= \sqrt{2}\left(1+\frac{x}{8}-\frac{5}{128}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right) \\
&= \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}x-\frac{5\sqrt{2}}{128}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)
\end{aligned}$$