Exercice| [1506] | 1| Développements limités

Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de : $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x+\mathrm{e}^{x}}$

Pistes de réflexion

— Il s'agit de faire le $DL_2(0)$ de $x \longmapsto x+\mathrm{e}^{x}$ pour ensuite pouvoir utiliser le $DL_2(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$.

Éléments de correction

On a directement que :

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x)}{x+\mathrm{e}^{x}} &= \ln(1+x) \times \frac{1}{x+\mathrm{e}^{x}} \\
&= \left[x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right] \times \frac{1}{x+1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)} \\
&= \left[x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right] \times \frac{1}{1+2x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)} \\
&\underset{2x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0}{=} \left[x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right] \\
&\qquad \times \left[1-\left(2x+\frac{x^2}{2}\right)+\left(2x+\frac{x^2}{2}\right)^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right] \\
&= \left[x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right] \times \left[1-2x-\frac{x^2}{2}+4x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right] \\
&= \left[x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right] \times \left[1-2x+\frac{7}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right] \\
&= x-2x^2-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2) \\
&= x-\frac{5}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)
\end{aligned}$$