Exercice| [1492] | 1| Intégrales impropres

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{2^t}\,\mathrm{d}t$ converge, et en donner sa valeur.
On pourra aussi utiliser l'écriture exponentielle de 2^t.

Pistes de réflexion

- On commencera par identifier les bornes impropres.
- Ensuite, on procèdera à une intégration par parties en faisant le choix de dériver les puissances de t.

Éléments de correction

La fonction $t \longmapsto \dfrac{t}{2^t} = t\mathrm{e}^{-t\ln(2)}$ est continue sur $\mathbb{R}^*+$, donc seule la borne $+\infty$ est impropre.
Pour tout réel $A \geq 0$, à l'aide d'une intégration par parties suivante :

$$\begin{array}{lcl} u(t) = t & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(t) = 1 \\ v(t) = \mathrm{e}^{-t\ln(2)} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(t) = -\dfrac{1}{\ln(2)}\mathrm{e}^{-t\ln(2)} \end{array}$$

où les deux fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0; A]$, on montre que :

$$\begin{aligned} \int_0^A t\mathrm{e}^{-t\ln(2)}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{\ln(2)}t\mathrm{e}^{-t\ln(2)}\right]_0^A + \frac{1}{\ln(2)}\int_0^A \mathrm{e}^{-t\ln(2)}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{A}{\ln(2)}\mathrm{e}^{-A\ln(2)} - \frac{1}{(\ln(2))^2}\left[\mathrm{e}^{-t\ln(2)}\right]_0^A \end{aligned}$$

Par suite $\displaystyle\int_0^A \frac{t}{2^t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-A\ln(2)}\left(-\frac{A}{\ln(2)} - \frac{1}{(\ln(2))^2}\right) + \frac{1}{(\ln(2))^2}$.
Comme $\ln(2) > 0$, et que $X^n\mathrm{e}^{-X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{2^t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{(\ln(2))^2}$.