EX. 1 | Réf. 1401

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$.
2. Déterminer la loi de X sachant $[X+Y=n]$ où $n \in \mathbb{N}$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1401

1. On pourra utiliser le système complet d'événements $([X=n])_{n\in\mathbb{N}}$ pour déterminer $\mathbb{P}([Z=k])$ où $z \in Z(\Omega)$.
2. On utilisera la définition d'une probabilité conditionnelle pour expliciter $\mathbb{P}([X=k] \mid [X+Y=n])$ et le caractère indépendant de X et Y pour poursuivre. Le résultat de la question précédente intervient par ailleurs.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 1401

1. Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, on en déduit que $Z(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Soit alors $k \in \mathbb{N}$. Les événements $([X=n])_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements de probabilités non nulles. Donc d'après la formule des probabilités totales, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z=k]) &= \mathbb{P}([X+Y=k]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n] \cap [X+Y=k]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) \times \mathbb{P}([X+Y=k] \mid [X=n]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) \times \mathbb{P}([Y=k-X] \mid [X=n]) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) \times \underbrace{\mathbb{P}([Y=k-n] \mid [X=n])}_{=0 \text{ si } k<n} \\
&= \sum_{n=0}^{k} \mathbb{P}([X=n]) \times \underbrace{\mathbb{P}([Y=k-n] \mid [X=n])}_{\substack{=\mathbb{P}([Y=k-n]) \\ \textbf{car } X \textbf{ et } Y \textbf{ indép.}}} \\
&= \sum_{n=0)}^{k} \mathbb{P}([X=n]) \times \mathbb{P}([Y=k-n])
\end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z=k]) &= \sum_{n=0}^{k} \left(\mathrm{e}^{-\lambda} \times \frac{\lambda^n}{n!} \times \mathrm{e}^{-\mu} \times \frac{\mu^{k-n}}{(k-n)!} \right) \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!(k-n)!} \lambda^n \mu^{k-n} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \times \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{n!(k-n)!} \lambda^k \mu^{k-n} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \times \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \lambda^n \mu^{k-n} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \times \frac{1}{k!} \times (\lambda+\mu)^k \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \times \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}
\end{aligned}$$

   et ainsi on en déduit que Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k \mid [X+Y=n]) &= \frac{\mathbb{P}([X=k] \cap [X+Y=n])}{\mathbb{P}(X+Y=n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}([X=k] \cap [Y=n-k])}{\mathbb{P}(X+Y=n)} \\
&\underset{\substack{X \textbf{ et } Y \\ \textbf{indépendantes}}}{=} \frac{\mathbb{P}(X+k)\,\mathbb{P}(Y=n-k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}
\end{aligned}$$

   Donc puisque d'après la question précédente $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$, il vient :

$$\mathbb{P}\left(X=k \mid [X+Y=n]\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \notin [\![0;n]\!] \\ \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\dfrac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{n-k}}{(n-k)!}\dfrac{n!}{\mathrm{e}^{-\lambda-\mu}\left(\lambda+\mu\right)^n} \text{ si } k \in [\![0;n]\!] \end{cases}$$

Par suite : $\forall k \in [\![0;n]\!]$,
$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X=k \mid [X+Y=n]\right) &= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\frac{\mathrm{e}^{-\mu}\mu^{n-k}}{(n-k)!}\frac{n!}{\mathrm{e}^{-\lambda-\mu}\left(\lambda+\mu\right)^n} \\ &= \binom{n}{k}\frac{\lambda^k\mu^{n-k}}{\left(\lambda+\mu\right)^n} \\ &= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

En remarquant que $\dfrac{\mu}{\lambda+\mu} = 1-\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$, on en déduit que, **sachant que l'événement** $[X+Y=n]$ **est réalisé**, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n;\,\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.