Exercice| [1345] | 1| Temps d'attente d'une deuxième boule blanche

Soient a et b deux entiers naturels vérifiant $1 \leq b < a$.
Une urne contient a boules dont b boules blanches et $a-b$ boules noires.
On effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne, avec remise.
Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de tirages justes nécessaires pour obtenir 2 boules blanches.

(1). Déterminer la loi de X.

(2). Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Pistes de réflexion

(1). On pourra remarquer que l'événement $[X=k]$ est réalisé lorsque l'on a obtenu qu'une seule boule blanche lors des $k-1$ premiers tirages et la deuxième boule blanche lors du k^{e} tirage.

(2). Il s'agit de s'assurer de la convergence absolue de la série numérique $\sum k \times \mathbb{P}([X=k])$ puis d'en calculer la somme. On pourra utiliser des développements en série entière usuel pour calculer la somme.

Éléments de correction

(1). **Support de X :** il faut au moins procéder à 2 tirages pour extraire au moins deux boules blanches, comme être dans la situation où l'on ne tire jamais une deuxième boule blanche, voire même ne pas tirer la première.
Ainsi $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

Loi de X : soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} = X(\Omega)$.
On considère les événements :
— A_k : « on obtient exactement une boule blanche lors des $k-1$ premiers tirages »
— B_k : « on tire une boule blanche au k^{e}tirage »
On a donc : $[X=k] = A_k \cap B_k$
Puisque les tirages sont effectués sans remise, on peut considérer qu'il y a indépendance entre ces derniers. Par suite : $\mathbb{P}([X=k]) = \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}(B_k)$.
Tous les tirages étant équiprobables, il vient que $\mathbb{P}(B_k) = \dfrac{b}{a}$.
Par ailleurs, si Y_k désigne la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées dans cet urne lors des $k-1$ premiers tirages selon le protocole décrit dans l'énoncé, Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(k-1, \dfrac{b}{a}\right)$.
Or $A_k = [Y_k = 1]$. Ainsi, on en déduit que : $\mathbb{P}(A_k) = \dbinom{k-1}{1}\left(\dfrac{b}{a}\right)^1\left(1-\dfrac{b}{a}\right)^{k-2}$.

Finalement, il vient que :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=k]) &= \binom{k-1}{1}\left(\frac{b}{a}\right)^1\left(1-\frac{b}{a}\right)^{k-2} \times \frac{b}{a}\\ &= (k-1)\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(1-\frac{b}{a}\right)^{k-2}\\ &= (k-1)\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{a-b}{b}\right)^{k-2}\end{aligned}$$

(2). X admet une espérance lorsque la série numérique $\displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)} k \times \mathbb{P}([X=k])$ est absolument convergente, et en cas de convergence, $\mathbb{E}(X)$ est égale à la somme de cette série.

Convergence absolue de $\displaystyle\sum_{k\in X(\Omega)} k \times \mathbb{P}([X=k])$: compte-tenu de l'expression précédemment trouvée, il s'agit de d'étudier l'absolue convergence de la série numérique $\displaystyle\left(\frac{b}{a}\right)^2 \sum_{k\in X(\Omega)} k(k-1)\left(\frac{a-b}{b}\right)^{k-2}$.
D'après le théorème de dérivation termes à terms pour les séries entières, les séries entières $\sum x^n$, $\sum nx^{n-1}$ et $\sum n(n-1)x^{n-2}$ sont de même rayon de convergence égal à 1.
Par suite, la série numérique $\sum n(n-1)x^{n-2}$ est absolument convergente quelque soit le réel $x \in \,]-1;1[$. Or ici $0 < \dfrac{a-b}{a} < 1$. Donc la série numérique $\displaystyle\left(\frac{b}{a}\right)^2 \sum_{k\in X(\Omega)} k(k-1)\left(\frac{a-b}{b}\right)^{k-2}$ est absolument convergente, et par suite X admet une espérance.

Calcul de la somme de la série $\displaystyle\left(\frac{b}{a}\right)^2 \sum_{k\in X(\Omega)} k(k-1)\left(\frac{a-b}{b}\right)^{k-2}$: on sait que :
$$\forall x \in \,]-1;1[\,, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$
D'après le théorème de dérivation termes à termes pour les séries entières, on sait que :
$$\forall x \in \,]-1;1[\,, \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ et } \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$
On en déduit donc que :
$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{a-b}{b}\right)^{k-2} &= \frac{2}{\left(1-\dfrac{a-b}{b}\right)^3}\\ &= \frac{2}{\left(\dfrac{a-a+b}{a}\right)^3}\\ &= \frac{2}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^3}\end{aligned}$$

Ainsi, il vient :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{b}{a} \times \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{a-b}{b}\right)^{k-2}\\ &= \frac{b}{a} \times \frac{2}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^3}\\ &= \frac{2a}{b}\end{aligned}$$