Exercice| [1343] | 1| Variables aléatoires à support fini

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et β un nombre réel. Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[\![0;n]\!]$ telle que :

$$\forall k \in [\![0;n]\!], \quad \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k}\frac{\beta}{k+1}$$

(1). Quelle valeur donner à β pour que l'on définisse bien la loi d'une variable aléatoire ?

(2). Déterminer alors $\mathbb{E}(X)$, puis $\mathbb{V}(X)$.

Pistes de réflexion

(1). On sait que $[X=k]$ doit être dans $[0;1]$ pour tout k, mais aussi que $\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}([X=k])=1$.

(2). Pour calculer $\mathbb{E}(X)$, on procèdera plutôt au calcul de $\mathbb{E}(X+1)$ à l'aide du théorème du transfert, et pour $\mathbb{V}(X)$, on s'intéressera à $\mathbb{E}(X(X+1))$.

Éléments de correction

(1). La condition $\mathbb{P}([X=k]) \in [0;1]$ impose de fait que $\beta \geq 0$.

Par ailleurs, on doit avoir $\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}([X=k])=1$, ce qui donne $\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)=1$ et donc que $\beta = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}}$.

Or $\binom{n}{k}\dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$, et donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1} &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+1}{i}\\
&= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}-1\right)\\
&= = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}
\end{aligned}$$

Donc X est une variable aléatoire réelle si et seulement si $\beta = \dfrac{n+1}{2^{n+1}-1}$.

(2). **Calcul de $\mathbb{E}(X)$:** On calcule $\mathbb{E}(X+1)$ à l'aide du théorème du transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X+1) &= \sum_{k=0}^{n}(k+1)\mathbb{P}(X=k)\\
&= \beta\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\\
&= \beta\times 2^n\\
&= \frac{(n+1)\,2^n}{2^{n+1}-1}
\end{aligned}$$

Ainsi par linéarité de l'espérance, on a $\mathbb{E}(X+1)=\mathbb{E}(X)+1$ et donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(X+1)-1\\
&= \frac{2^n(n-1)+1}{2^{n+1}-1}
\end{aligned}$$

.

Calcul de $\mathbb{V}(X)$: Pour calculer la variance, on calcule d'abord $\mathbb{E}((X(X+1))$ à l'aide du théorème du transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(X+1)) &= \sum_{k=0}^{n}k(k+1)\mathbb{P}(X=k)\\
&= \beta\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}\\
&= \beta\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}\\
&= = n\beta\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\\
&= n\beta 2^{n-1}
\end{aligned}$$

Or $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X+1)) - \mathbb{E}(X)$ et par l'application de la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}((X(X+1)) - \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2\\
&= \mathbb{E}(X(X+1)) - \mathbb{E}(X)(\mathbb{E}(X)+1)\\
&= \frac{(n+1)n2^{n-1}}{2^{n+1}-1} - \frac{2^n(n-1)+1}{2^{n+1}-1}\,\frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}-1}\\
&= \frac{(n+1)2^{n-1}\left(2^{n+1}-n-2\right)}{(2^{n+1}-1)^2}
\end{aligned}$$