

Exercice [1331] | 1 | Lois marginales et lois conditionnelles d'un couple de variables aléatoires finies

La loi du couple aléatoire finies  $(X, Y)$  est donné par le tableau suivant :

		Y		
		0	1	2
X	3	$3\alpha$	$6\alpha$	$7\alpha$
	7	$9\alpha$	$12\alpha$	$15\alpha$
	37	0	0	$18\alpha$

- Déterminer la constante  $\alpha$ .
- Donner les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ .
- Quelle est la loi de  $Y$  sachant que  $[X \leq 7]$ ?

Pistes de réflexion

- On déterminera  $\alpha$  en utilisant par exemple les lois marginales.
- On utilisera pour chaque loi marginale le système complet d'événements associé à l'autre variable aléatoire.
- On reviendra à la définition d'une probabilité conditionnelle pour obtenir la loi de  $Y$  conditionnée par  $[X = 7]$ .

Éléments de correction

(1). On doit avoir :  $\mathbb{P}([X = 3]) + \mathbb{P}([X = 7]) + \mathbb{P}([X = 37]) = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Or on a : } \mathbb{P}([X = 3]) &= \mathbb{P}([X = 3] \cap [Y = 0]) + \mathbb{P}([X = 3] \cap [Y = 1]) \\ &\quad + \mathbb{P}([X = 3] \cap [Y = 2]) \\ &= 3\alpha + 6\alpha + 7\alpha \\ &= 16\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = 7]) &= \mathbb{P}([X = 7] \cap [Y = 0]) + \mathbb{P}([X = 7] \cap [Y = 1]) \\ &\quad + \mathbb{P}([X = 7] \cap [Y = 2]) \\ &= 9\alpha + 12\alpha + 15\alpha \\ &= 36\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = 37]) &= \mathbb{P}([X = 37] \cap [Y = 0]) + \mathbb{P}([X = 37] \cap [Y = 1]) \\ &\quad + \mathbb{P}([X = 37] \cap [Y = 2]) \\ &= 0 + 0 + 18\alpha \\ &= 18\alpha \end{aligned}$$

Ainsi il vient :  $16\alpha + 36\alpha + 18\alpha = 1$  ce qui donne  $\alpha = \frac{1}{70}$ .

La loi du couple  $(X, Y)$  est alors donnée par le tableau suivant :

		Y		
		0	1	2
X	3	$\frac{3}{70}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{1}{10}$
	7	$\frac{9}{70}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{14}$
	37	0	0	$\frac{9}{35}$

(2). Loi de  $X$  : en reprenant les calculs précédents pour  $\alpha = \frac{1}{70}$ , il vient :

$$\mathbb{P}([X = 3]) = \frac{8}{35} \quad \mathbb{P}([X = 7]) = \frac{18}{35} \quad \mathbb{P}([X = 37]) = \frac{9}{35}$$

Loi de  $Y$  : en utilisant le système complet d'événements  $[X = 3]$ ,  $[X = 7]$ ,  $[X = 37]$ , il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = 0]) &= \mathbb{P}([Y = 0] \cap [X = 3]) + \mathbb{P}([Y = 0] \cap [X = 7]) \\ &\quad + \mathbb{P}([Y = 0] \cap [X = 37]) \\ &= \frac{3}{70} + \frac{9}{70} + 0 \\ &= \frac{6}{35} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = 1]) &= \mathbb{P}([Y = 1] \cap [X = 3]) + \mathbb{P}([Y = 1] \cap [X = 7]) \\ &\quad + \mathbb{P}([Y = 1] \cap [X = 37]) \\ &= \frac{3}{35} + \frac{6}{35} + 0 \\ &= \frac{9}{35} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = 2]) &= \mathbb{P}([Y = 2] \cap [X = 3]) + \mathbb{P}([Y = 2] \cap [X = 7]) \\ &\quad + \mathbb{P}([Y = 2] \cap [X = 37]) \\ &= \frac{1}{20} + \frac{3}{14} + \frac{9}{35} \\ &= \frac{2}{35} \end{aligned}$$

(3). Le support de la loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $[X \geq 7]$  est  $[[0; 2]]$ , et on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X \geq 7]}([Y = 0]) &= \frac{\mathbb{P}([Y = 0] \cap [X \geq 7])}{\mathbb{P}([X \geq 7])} \\ &= \frac{\mathbb{P}([Y = 0] \cap [X = 7]) + \mathbb{P}([Y = 0] \cap [X = 37])}{\mathbb{P}([X = 7]) + \mathbb{P}([X = 37])} \\ &= \frac{\frac{9}{70} + 0}{\frac{18}{35} + \frac{9}{35}} \\ &= \frac{\frac{9}{70}}{\frac{27}{35}} \\ &= \frac{1}{6} \\ \mathbb{P}_{[X \geq 7]}([Y = 1]) &= \frac{\mathbb{P}([Y = 1] \cap [X \geq 7])}{\mathbb{P}([X \geq 7])} \\ &= \frac{\mathbb{P}([Y = 1] \cap [X = 7]) + \mathbb{P}([Y = 1] \cap [X = 37])}{\mathbb{P}([X = 7]) + \mathbb{P}([X = 37])} \\ &= \frac{\frac{3}{35} + \frac{6}{70}}{\frac{18}{35} + \frac{9}{35}} \\ &= \frac{\frac{35}{6} + 0}{\frac{35}{6} + \frac{9}{35}} \\ &= \frac{\frac{35}{27}}{\frac{35}{27}} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\{X \geq 7\}}(\{Y = 2\}) &= \frac{\mathbb{P}(\{Y = 2\} \cap \{X \geq 7\})}{\mathbb{P}(\{X \geq 7\})} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\{Y = 2\} \cap \{X = 7\}) + \mathbb{P}(\{Y = 2\} \cap \{X = 37\})}{\mathbb{P}(\{X = 7\}) + \mathbb{P}(\{X = 37\})} \\
&= \frac{\frac{3}{18} + \frac{9}{35}}{\frac{35}{33} + \frac{9}{35}} \\
&= \frac{\frac{35}{27}}{\frac{35}{11}} \\
&= \frac{11}{18}
\end{aligned}$$