Exercice| [1330] | 1| Étude de l'indépendance de deux variables aléatoires

Une urne contient 4 jetons numérotés de 1 à 4.
On tire successivement et sans remise deux jetons et on note X et Y les variables aléatoires réelles discrètes correspondantes respectivement au premier et au second numéro obtenus.
La loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0

(1). Donner les lois marginales de X et de Y.

(2). Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

(3). Les variables aléatoires réelles discrètes X et Y sont-elles indépendantes ?

Pistes de réflexion

(1). Il s'agit d'obtenir les lois marginales en utilisant successivement les systèmes complets d'événements associés à chacune des ces deux variables aléatoires.

(2). On commencera par calculer $\mathbb{E}(X)$, puis $\mathbb{E}(Y)$ et enfin EXY.

(3). Soit on vérifie que $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([X = i]) \times \mathbb{P}([Y = j])$ pour tout $(i, j) ßX(\Omega) \times Y(\Omega)$, soit on trouve un tel couple (i, j) qui ne le satisfait pas, ou plus simplement, interpréter le résultat de la question précédente.

Éléments de correction

(1). Loi de X : il s'agit de déterminer la loi marginale la variable aléatoire X du couple (X, Y).

Les événements $[Y = 1]$, $[Y = 2]$, $[Y = 3]$ et $[Y = 4]$ forment un système complet d'événements, et on a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=1]) &= \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) + \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=2]) \\
&\quad + \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=3]) + \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=4]) \\
&= 0 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=2]) &= \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=1]) + \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=2]) \\
&\quad + \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=3]) + \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=4]) \\
&= \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=3]) &= \mathbb{P}([X=3]\cap[Y=1]) + \mathbb{P}([X=3]\cap[Y=2]) \\
&\quad + \mathbb{P}([X=3]\cap[Y=3]) + \mathbb{P}([X=3]\cap[Y=4]) \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{12} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=4]) &= \mathbb{P}([X=4]\cap[Y=1]) + \mathbb{P}([X=4]\cap[Y=2]) \\
&\quad + \mathbb{P}([X=4]\cap[Y=3]) + \mathbb{P}([X=4]\cap[Y=4]) \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + 0 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

que l'on peut récapituler dans le tableau de loi pour X :

i	1	2	3	4
$\mathbb{P}([X = i])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

et on reconnaît que X suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$

Loi de Y : il s'agit de déterminer la loi marginale la variable aléatoire YX du couple (X, Y).

Les événements $[X = 1]$, $[X = 2]$, $[X = 3]$ et $[X = 4]$ forment un système complet d'événements, et on a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=1]) &= \mathbb{P}([Y=1]\cap[X=1]) + \mathbb{P}([Y=1]\cap[X=2]) \\
&\quad + \mathbb{P}([Y=1]\cap[X=3]) + \mathbb{P}([Y=1]\cap[X=4]) \\
&= 0 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=2]) &= \mathbb{P}([Y=2]\cap[X=1]) + \mathbb{P}([Y=2]\cap[X=2]) \\
&\quad + \mathbb{P}([Y=2]\cap[X=3]) + \mathbb{P}([Y=2]\cap[X=4]) \\
&= \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=3]) &= \mathbb{P}([Y=3]\cap[X=1]) + \mathbb{P}([Y=3]\cap[X=2]) \\
&\quad + \mathbb{P}([Y=3]\cap[X=3]) + \mathbb{P}([Y=3]\cap[X=4]) \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{12} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=4]) &= \mathbb{P}([Y=4]\cap[X=1]) + \mathbb{P}([Y=4]\cap[X=2]) \\
&\quad + \mathbb{P}([Y=4]\cap[X=3]) + \mathbb{P}([Y=4]\cap[X=4]) \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + 0 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

que l'on peut récapituler dans le tableau de loi pour Y :

j	1	2	3	4
$\mathbb{P}([Y = j])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

et on reconnaît que Y suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$

(2). Espérance de X : X suivant une loi uniforme sur $\{1,2,3,4\}$, on en déduit que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{4+1}{2}$, c'est à dire que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{5}{2}$.

Espérance de Y : Y suivant une loi uniforme sur $\{1,2,3,4\}$, on en déduit que $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{4+1}{2}$, c'est à dire que $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{5}{2}$.

Espérance de XY : X et Y étant deux variables aléatoires finies, la variable aléatoire $X \times Y$ admet une espérance qui par définition vaut $\mathbb{E}(XY) = \displaystyle\sum_{(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} i \times j \times \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} i \times j \times \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \\
&= 1\times 1\times \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) \\
&\quad +1\times 2\times \mathbb{P}([X=1]\cap[X=2]) \\
&\quad +1\times 3\times \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=3]) \\
&\quad +1\times 4\times \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=4]) \\
&\quad +2\times 1\times \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=1]) \\
&\quad +2\times 2\times \mathbb{P}([X=2]\cap[X=2]) \\
&\quad +2\times 3\times \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=3]) \\
&\quad +2\times 4\times \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=4]) \\
&\quad +3\times 1\times \mathbb{P}([X=3]\cap[Y=1]) \\
&\quad +3\times 2\times \mathbb{P}([X=3]\cap[X=2]) \\
&\quad +3\times 3\times \mathbb{P}([X=3]\cap[Y=3]) \\
&\quad +3\times 4\times \mathbb{P}([X=3]\cap[Y=4]) \\
&\quad +4\times 1\times \mathbb{P}([X=4]\cap[Y=1]) \\
&\quad +4\times 2\times \mathbb{P}([X=4]\cap[X=2]) \\
&\quad +4\times 3\times \mathbb{P}([X=4]\cap[Y=3]) \\
&\quad +4\times 4\times \mathbb{P}([X=4]\cap[Y=4]) \\
&= 1\times 0 + 2\times\frac{1}{12} + 3\times\frac{1}{12} + 4\times\frac{1}{12} \\
&\quad +2\times\frac{1}{12} + 4\times 0 + 6\times\frac{1}{12} + 8\times\frac{1}{12} \\
&\quad 3\times\frac{1}{12} + 6\times\frac{1}{12} + 9\times 0 + 12\times\frac{1}{12} \\
&\quad 4\times\frac{1}{12} + 8\times\frac{1}{12} + 12\times\frac{1}{12} + 16\times 0 \\
&= \frac{2+3+4+2+6+8+3+6+12+4+8+12}{12} \\
&= \frac{70}{12}
\end{aligned}$$

Calcul de $\operatorname{Cov}(X,Y)$: puisque $\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \frac{70}{12} - \frac{5}{2}\times\frac{5}{2} \\
&= \frac{70}{12} - \frac{25}{4} \\
&= \frac{70}{12} - \frac{75}{12} \\
&= -\frac{5}{12}
\end{aligned}$$

(3). Si les deux variables aléatoires X et Y étaient indépendantes, on devrait avoir $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$. Par suite, comme ce n'est pas le cas, X et Y ne peuvent pas être indépendantes.