Exercice| [1313] | 1| Coefficient de corrélation d'un couple de variable aléatoire

Soit X une variable uniforme sur $[\![0;3]\!]$ et $Y=(X-1)^2$.

(1). Déterminer la loi conjointe de (X,Y).

(2). Calculer alors la covariance de X et Y puis leur coefficient de corrélation linéaire.

Pistes de réflexion

(1). On commencera par identifier le support de Y et remarquer que certains événements $[X=i]\cap[Y=j]$ sont de probabilité nulles.

(2). On commencera par déterminer $\mathbb{E}(X)$, puis $\mathbb{E}(Y)$ et enfin $\mathbb{E}(XY)$ pour obtenir $\operatorname{Cov}(X,Y)$. Restera ensuite le calcul de $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$ pour obtenir le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

Éléments de correction

(1). Support de Y : puisque $X(\Omega)=[\![0;3]\!]$, l'image de $X(\Omega)$ par la fonction $x\longmapsto(x-1)^2$ est $\{0,1,4\}$. Ainsi, on a $Y(\Omega)=\{0,1,2\}$.

Loi du couple (X,Y) : soit $(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) &= \mathbb{P}([X=i])\times\mathbb{P}_{[X=i]}([Y=j])\\ &= \mathbb{P}([X=i])\times\mathbb{P}_{[X=i]}\left(\left[(X-1)^2=j\right]\right)\\ &= \frac{1}{4}\times\begin{cases}0 \text{ si } j\neq(i-1)^2\\ 1 \text{ si } j=(i-1)^2\end{cases}\\ &= \begin{cases}0 \text{ si } j\neq(i-1)^2\\ \frac{1}{4} \text{ si } j=(i-1)^2\end{cases}\end{aligned}$$

On récapitule alors ces résultats dans le tableau de loi conjointe suivant :

X \ Y	0	1	4
0	0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	0	0
2	0	$\frac{1}{4}$	0
3	0	0	$\frac{1}{4}$

(2). Espérance de X : puisque X suit la loi uniforme sur $[\![0;3]\!]$, X est une variable aléatoire finie et admet donc une espérance qui est alors $\mathbb{E}(X)=\sum_{i\in X(\Omega)} i\times\mathbb{P}([X=i])$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{i\in X(\Omega)} i\times\mathbb{P}([X=i])\\ &= 0\times\mathbb{P}([X=0])+1\times\mathbb{P}([X=1])\\ &\quad+2\times\mathbb{P}([X=2])+3\times\mathbb{P}([X=3])\\ &= 0+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}\\ &= \frac{1+2+3}{4}\\ &= \frac{6}{4}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Espérance de Y : puisque Y est une variable aléatoire finie et admet donc une espérance qui est alors $\mathbb{E}(Y)=\sum_{j\in Y(\Omega)} j\times\mathbb{P}([Y=j])$.

La loi de Y est donc une des lois marginales du couple (X,Y) que l'on obtient en utilisant le système complet d'événements $[X=0]$, $[X=1]$, $[X=2]$ et $[X=3]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y=0]) &= \mathbb{P}([Y=0]\cap[X=0])+\mathbb{P}([Y=0]\cap[X=1])\\ &\quad+\mathbb{P}([Y=0]\cap[X=2])+\mathbb{P}([Y=0]\cap[X=3])\\ &= 0+\frac{1}{4}+0+0\\ &= \frac{1}{4}\\ \mathbb{P}([Y=1]) &= \mathbb{P}([Y=1]\cap[X=0])+\mathbb{P}([Y=1]\cap[X=1])\\ &\quad+\mathbb{P}([Y=1]\cap[X=2])+\mathbb{P}([Y=1]\cap[X=3])\\ &= \frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}+0\\ &= \frac{1}{2}\\ \mathbb{P}([Y=4]) &= \mathbb{P}([Y=4]\cap[X=0])+\mathbb{P}([Y=4]\cap[X=1])\\ &\quad+\mathbb{P}([Y=4]\cap[X=2])+\mathbb{P}([Y=4]\cap[X=3])\\ &= 0+0+0+\frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

On peut récapituler ces résultats dans un tableau de loi pour Y :

j	0	1	4
$\mathbb{P}([Y=j])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Par suite, l'espérance de Y est :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{j\in Y(\Omega)} j\times\mathbb{P}([Y=j])\\ &= 0\times\mathbb{P}([Y=0])+1\times\mathbb{P}([Y=1])\\ &\quad+4\times\mathbb{P}([Y=4])\\ &= 0+1\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{4}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Calcul de $\mathbb{E}(XY)$: puisque X et Y sont deux variables aléatoires finies, la variable aléatoire XY admet une espérance qui est alors $\mathbb{E}(XY)=\sum_{(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} i\times j\times\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])$. On a donc :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \underbrace{0\times 0\times \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=0])}_{=0}+\underbrace{0\times 1\times \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=1])}_{=0}\\
&\quad \underbrace{+0\times 4\times \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=4])}_{=0}+\underbrace{1\times 0\times \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=0])}_{=0}\\
&\quad +\underbrace{1\times 1\times \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1])}_{=0}+\underbrace{1\times 4\times \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=4])}_{=0}\\
&\quad +\underbrace{2\times 0\times \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=0])}_{=0}+2\times 1\times \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=1])\\
&\quad +\underbrace{2\times 4\times \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=4])}_{=0}+\underbrace{3\times 0\times \mathbb{P}([X=3]\cap[Y=0])}_{=0}\\
&\quad +\underbrace{3\times 1\times \mathbb{P}([X=3]\cap[Y=1])}_{=0}+3\times 4\times \mathbb{P}([X=3]\cap[Y=4])\\
&= 2\times 1\times \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=1])+3\times 4\times \mathbb{P}([X=3]\cap[Y=4])\\
&= 2\times\frac{1}{4}+12\times\frac{1}{4}\\
&= \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

Calcul de $\operatorname{Cov}(X,Y)$ **:** puisque $\operatorname{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, on en déduit que :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\\
&= \frac{7}{2}-\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\\
&= \frac{7}{2}-\frac{9}{4}\\
&= \frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

Calcul de $\mathbb{V}(X)$ **:** puisque X est une variable aléatoire finie, elle admet une espérance qui d'après la formule de Huygens vaut $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\left(X^2\right)-(\mathbb{E}(X))^2$.

La variable aléatoire X étant une variable aléatoire finie, d'après le théorème de transfert, la variable aléatoire X^2 admet une espérance qui vaut $\mathbb{E}\left(X^2\right)=\sum_{i\in X(\Omega)} i^2\times \mathbb{P}([X=i])$.

On a donc :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= 0^2\times\mathbb{P}([X=0])+1^2\times\mathbb{P}([X=1])+2^2\times\mathbb{P}([X=2])\\
&\quad +3^2\times\mathbb{P}([X=3])\\
&= 0+1\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}+9\times\frac{1}{4}\\
&= \frac{1+4+9}{4}\\
&= \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

Par suite, il vient :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left(X^2\right)-(\mathbb{E}(X))^2\\
&= \frac{7}{2}-\left(\frac{3}{2}\right)^2\\
&= \frac{7}{2}-\frac{9}{4}\\
&= \frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

Calcul de $\mathbb{V}(Y)$ **:** puisque Y est une variable aléatoire finie, elle admet une espérance qui d'après la formule de Huygens vaut $\mathbb{V}(Y)=\mathbb{E}\left(Y^2\right)-(\mathbb{E}(Y))^2$.

La variable aléatoire Y étant une variable aléatoire finie, d'après le théorème de transfert, la variable aléatoire Y^2 admet une espérance qui vaut $\mathbb{E}\left(Y^2\right)=\sum_{j\in Y(\Omega)} j^2\times \mathbb{P}([Y=j])$.

On a donc :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Y^2\right) &= 0^2\times\mathbb{P}([Y=0])+1^2\times\mathbb{P}([Y=1])+4^2\times\mathbb{P}([Y=2])\\
&= 0+1\times\frac{1}{2}+16\times\frac{1}{4}\\
&= \frac{2+16}{4}\\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

Par suite, il vient :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}\left(Y^2\right)-(\mathbb{E}(Y))^2\\
&= \frac{9}{2}-\left(\frac{3}{2}\right)^2\\
&= \frac{9}{2}-\frac{9}{4}\\
&= \frac{9}{4}
\end{aligned}
$$

Calcul de ρ_{XY} **:** par définition, on a $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}\times\sqrt{\mathbb{V}(X)}}$.

Ainsi, on a :

$$
\begin{aligned}
\rho_{XY} &= \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}\times\sqrt{\mathbb{V}(X)}}\\
&= \frac{\frac{5}{4}}{\sqrt{\frac{5}{4}}\times\sqrt{\frac{9}{4}}}\\
&= \frac{5}{3\sqrt{5}}\\
&= \frac{\sqrt{5}}{3}
\end{aligned}
$$