Exercice| [1310] | 1| Étude du fonctionnement d'un ascenceur

Un ascenseur dessert un immeuble de 10 étages. Douze personnes sont au rez-de-chaussée et montent dans l'ascenseur. On suppose que les choix des étages auxquels descendent les 12 personnes sont indépendants les uns des autres.
Pour tout $i \in [\![1;10]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage i et 0 sinon. On note X le nombre d'arrêts de l'ascenseur.

(1). Déterminer la loi des variables aléatoires X_i.

(2). Pour $i \neq j$, calculer $\mathbb{P}([X_i = 0] \cap [X_j = 0])$ et en déduire la loi du couple (X_i, X_j) ainsi que $\operatorname{Cov}(X_i,\ X_j)$.

(3). Exprimer X en fonction des X_i et en déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Pistes de réflexion

(1). Les variables aléatoires X_i suivent une loi de Bernoulli dont il faut identifier le paramètre.

(2). L'événement $[X_i = 0] \cap [X_i = 0]$ ne se produit que si personne ne descend aux étages i et j. Pour la loi du couple, on pourra passer par les lois marginales qui sont connues.

(3). Il est presque immédiat de remarquer que $X = \sum_{i=1}^{12} X_i$.

Éléments de correction

(1). Soit $i \in [\![1;10]\!]$. Puisque la variable aléatoire X_i ne peut prendre que deux valeurs, 0 ou 1, X suit une loi de Bernoulli dont on doit identifier le paramètre.
Pour tout $j \in [\![1;12]\!]$, on note $E_j^{(i)}$ l'événement « la personne j descend à l'étage i ».
Ainsi, on a : $\quad [X_i = 0] = \overline{E_1^{(i)}} \cap \overline{E_2^{(i)}} \cap \ldots \cap \overline{E_{12}^{(i)}}$
Par indépendance supposée du choix des personnes à descendre à l'étage i, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_i = 0]) &= \mathbb{P}\left(\overline{E_1^{(i)}} \cap \overline{E_2^{(i)}} \cap \ldots \cap \overline{E_{12}^{(i)}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\overline{E_1^{(i)}}\right) \times \mathbb{P}\left(\overline{E_2^{(i)}}\right) \times \ldots \times \mathbb{P}\left(\overline{E_{12}^{(i)}}\right) \\
&= \underbrace{\frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \ldots \times \frac{9}{10}}_{12 \text{ facteurs}} \\
&= \left(\frac{9}{10}\right)^{12}
\end{aligned}$$

On en déduit alors la loi de X_i que l'on récapitule dans le tableau de loi ci-dessous :

k	0	1
$\mathbb{P}([X_i = k])$	$\left(\frac{9}{10}\right)^{12}$	$1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{12}$

(2). Soit $(i, j) \in [\![1;10]\!] \times [\![1;10]\!]$ avec $i \neq j$ où l'on supposera $i < j$.
Calcul de $p[X_i = 0] \cap [X_j = 0]$ **:** On a :

$$\begin{aligned}
[X_i = 0] \cap [X_j = 0] &= \left(\overline{E_1^{(i)}} \cap \overline{E_2^{(i)}} \cap \ldots \cap \overline{E_{12}^{(i)}}\right) \cap \left(\overline{E_1^{(j)}} \cap \overline{E_2^{(j)}} \cap \ldots \cap \overline{E_{12}^{(j)}}\right) \\
&= \left(\overline{E_1^{(i)}} \cap \overline{E_1^{(j)}}\right) \cap \left(\overline{E_2^{(i)}} \cap \overline{E_2^{(j)}}\right) \cap \ldots \cap \left(\overline{E_{12}^{(i)}} \cap \overline{E_{12}^{(j)}}\right)
\end{aligned}$$

Par indépendance supposée du choix de descendre ou non à un étage donné pour chaque personne, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_i = 0] \cap [X_j = 0]) &= \mathbb{P}\left(\left(\overline{E_1^{(i)}} \cap \overline{E_1^{(j)}}\right) \cap \left(\overline{E_2^{(i)}} \cap \overline{E_2^{(j)}}\right) \cap \ldots \cap \left(\overline{E_{12}^{(i)}} \cap \overline{E_{12}^{(j)}}\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\overline{E_1^{(i)}} \cap \overline{E_1^{(j)}}\right) \times \mathbb{P}\left(\overline{E_2^{(i)}} \cap \overline{E_2^{(j)}}\right) \times \ldots \mathbb{P}\left(\overline{E_{12}^{(i)}} \cap \overline{E_{12}^{(j)}}\right) \\
&= \underbrace{\frac{8}{10} \times \frac{8}{10} \times \ldots \times \frac{8}{10}}_{12 \text{ facteurs}} \\
&= \left(\frac{8}{10}\right)^{12}
\end{aligned}$$

Loi du couple (X_i, X_j) **:** on a déjà que $\mathbb{P}([X_i = 0] \cap [X_j = 0]) = \left(\frac{8}{10}\right)^{12}$.

Puisque X_j suit une loi de Bernoulli, les événements $[X_j = 0]$ et $[X_j = 1]$ forment un système complet d'événements.
Ainsi, on en déduit que :
$\mathbb{P}([X_i = 0]) = \mathbb{P}([X_i = 0] \cap [X_j = 0]) + \mathbb{P}([X_i = 0] \cap [X_j = 0])$
On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_i = 0] \cap [X_j = 1]) &= \mathbb{P}([X_i = 0]) - \mathbb{P}([X_i = 0] \cap [X_j = 0]) \\
&= \left(\frac{9}{10}\right)^{12} - \left(\frac{8}{10}\right)^{12}
\end{aligned}$$

Par symétrie entre i et j, il vient que :

$$\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 0]) = \left(\frac{9}{10}\right)^{12} - \left(\frac{8}{10}\right)^{12}.$$

Par ailleurs, comme l'on doit avoir :

$$\mathbb{P}([X_i = 0] \cap [X_j = 0]) + \mathbb{P}([X_i = 0] \cap [X_j = 1]) + \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j] = 0) + \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = 1$$

on en déduit que : $\quad \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = 1 - 2\left(\frac{9}{10}\right)^{12} + \left(\frac{8}{10}\right)^{12}$.

On peut alors récapituler ces résultats dans un tableau de loi de couple :

$X_i \backslash X_j$	0	1
0	$\left(\frac{9}{10}\right)^{12}$	$\left(\frac{9}{10}\right)^{12} - \left(\frac{8}{10}\right)^{12}$
1	$\left(\frac{9}{10}\right)^{12} - \left(\frac{8}{10}\right)^{12}$	$1 - 2\left(\frac{9}{10}\right)^{12} + \left(\frac{8}{10}\right)^{12}$

Espérance de X_i **et** X_j **:** puisque X_i et X_j suivent toutes les deux une loi de Bernoulli de même paramètre $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{12}$, on en déduit que $\mathbb{E}(X_i) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{12}$ et $\mathbb{E}(X_j) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{12}$.

Espérance de X_iX_j **:** comme X_i et X_j sont deux variables aléatoires finies, la variable aléatoire X_iX_j admet une espérance qui est donnée par $\mathbb{E}(X_iX_j) = \sum_{(n,m) \in X_i(\Omega) \times X_j(\Omega)} n \times m \times \mathbb{P}([X_i = n] \cap [X_j = m])$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_iX_j) &= \sum_{(n,m)\in X_i(\Omega)\times X_j(\Omega)} n\times m\times \mathbb{P}([X_i=n]\cap[X_j=m])\\
&= \underbrace{0\times 0\times \mathbb{P}([X_i=0]\cap[X_j=0])}_{=0}+\underbrace{1\times 0\times \mathbb{P}([X_i=1]\cap[X_j=0])}_{=0}\\
&\quad +\underbrace{0\times 1\times \mathbb{P}([X_i=0]\cap[X_j=1])}_{=0}+1\times 1\times \mathbb{P}([X_i=1]\cap[X_j=1])\\
&= 1-2\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{8}{10}\right)^{12}
\end{aligned}$$

Calcul de $\mathrm{Cov}(X_i,\, X_j)$ **:** on sait que $\mathrm{Cov}(X_i,\, X_j)=\mathbb{E}(X_iX_j)-\mathbb{E}(X_i)\,\mathbb{E}(X_j)$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_i,\, X_j) &= \mathbb{E}(X_iX_j)-\mathbb{E}(X_i)\,EX_j\\
&= 1-2\left(\frac{9}{10}\right)^{12}+\left(\frac{8}{10}\right)^{12}-\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^{12}\right)^2\\
&= \left(\frac{8}{10}\right)^{12}-\left(\frac{9}{10}\right)^{24}
\end{aligned}$$

(3). On a directement que $X=\displaystyle\sum_{i=1}^{10} X_i$ puisque l'événement $[X_i=0]$ ne se produit que si personne ne descend à l'étage i et l'événement $[X_i=1]$ se produit si au moins une personne y descend.

Par linéarité de l'espérance, il vient que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{12} X_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{10}\mathbb{E}(X_i)\\
&= \sum_{i=1}^{10}\left(1-\left(\frac{9}{12}\right)^{12}\right)\\
&= 12\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^{12}\right)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{10}\underbrace{\mathbb{V}(X_i)}_{=\mathbb{V}(X_1)}+2\sum_{1\leq i<j\leq 10}\underbrace{\mathrm{Cov}(X_i,\, X_j)}_{=\mathrm{Cov}(X_1,\,X_2)}\\
&= 10\mathbb{V}(X_1)+\underbrace{9\times 10}_{\text{nombre de termes de la somme}}\times\mathrm{Cov}(X_1,\, X_2)
\end{aligned}$$