Exercice| [1280] | 1| Lancers succesifs de dé et indépendance d'événements

On lance un dé plusieurs fois en décidant de s'arrêter au premier 6 obtenu. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements :

— A_n : « le n^e lancer a lieu et amène 6 » ;
— B_n : « le n^e lancer a lieu et amène 1, 2, 3, 4 ou 5 ».

(1). Justifier que A_1 et A_2 ne sont pas indépendants et que $\overline{A_2} \neq B_2$.

(2). On suppose que $n \geq 2$. Justifier que : $A_n = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{n-1} \cap A_n$, et en déduire $\mathbb{P}(A_n)$.

Pistes de réflexion

(1). On reviendra à la définition de l'indépendance de deux événements en remarquant notamment que $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ compte-tenu du protocole retenu ici. On pourra utiliser l'expression du contraire d'une union pour la comparaison de $\overline{A_2}$ etB_2.

(2). La démarche faite pour le calcul de $\mathbb{P}(A_2)$ se généralise pour le calcul de $\mathbb{P}(A_n)$ où il s'agit d'étudier le rang d'apparition du premier six lors d'une succession de lancers.

Éléments de correction

(1). **Étude de l'indépendance de A_1 et A_2 :** par définition, les deux événements A_1 et A_2 sont indépendants si $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2)$.

Par définition de l'événement A_1 et parce qu'on lance au moins une première fois le dé, on a : $\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{1}{6}$.

Par contre, l'événement A_2 ne peut se produire que si B_1 et A_2 se sont réalisés. Ainsi : $A_2 = B_1 \cap A_2$.

Par conséquent d'après la formule des probabilités composées : $\mathbb{P}(A_2) = \underbrace{\underbrace{\mathbb{P}(B_1)}_{=\frac{5}{6}} \times \underbrace{\mathbb{P}_{B_1}(A_2)}_{\frac{1}{6}}}_{=\frac{5}{36}}$

Or l'événement $A_1 \cap A_2$ est l'événement impossible puisque la réalisation de A_1 entraîne l'arrêt des lancers. Ainsi, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = 0$ qui est clairement différent de $\mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \neq 0$.

Étude des événements B_2 et $\overline{A_2}$: par définition de l'événement A_2, est l'évement :

A_2 ´ [le second lancer a lieu] et [il a lieu et on obtient le six] ˇ

Par suite, l'événement $\overline{A_2}$ est donc l'événement :

$\overline{A_2}$: ´ [le second lancer n'a pas lieu] ou [il a lieu et on n'obtient pas le six] ˇ

Ainsi, on a : $\overline{A_2} = A_1 \cup B_2$ et $A_1 \cup B_2 \neq B_2$.

(2). Sur le même principe que pour l'étude de l'événement A_2, l'événement A_n ne peut avoir lieu que si les $n-1$ lancers précédents n'ont pas conduit à l'obtention du six. Ainsi, il vient que : $A_n = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{n-1} \cap A_n$.

D'après la formule des probabilités composées, il vient que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots B_{n-2}}(B_{n-1}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{n-1}}(A_n) \\
&= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \ldots \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{5^{n-1}}{6^n}
\end{aligned}$$