Exercice| [1272] | 1| Parité d'une loi de Poisson ou d'une loi géométrique

(1). On suppose dans cette question que X suit une loi de Poisson de paramètre λ.

(a). Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}([X=2k])$.

(b). X a-t-elle plus de chances d'être paire que d'être impaire ?

(2). Même question si X suit une loi géométrique de paramètre p.

Pistes de réflexion

(1). (a). On s'assurera au préalable de la convergence de la série $\sum \mathbb{P}([X=2k])$, puis on explicitera $\mathbb{P}([X=2k])$ en remarquant que l'on obtient que les termes d'indices pairs d'une série exponentielle, d'où l'idée de faire intervenir le développement en série entière de $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.

(b). On remarquera que $[X \text{ est paire}] = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} [X=2k]$ et il s'agit donc de regarder si $\mathbb{P}([X \text{ est pair}]) \geq \dfrac{1}{2}$.

(2). On reprendra l'ensemble des points précédemment développés en les adaptant au cas d'une loi géométrique pour ce qui est du calcul de $\mathbb{P}([X \text{ est paire}])$.

Éléments de correction

(1). (a). **Convergence de la série numérique $\sum \mathbb{P}([X=2k])$:** la série numérique $\sum \mathbb{P}([X=2k])$ est une série numérique à termes positifs telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X=2k]) \leq \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([X=k])$$

Puisque X est une variable aléatoire, la série numérique à termes positifs $\sum \mathbb{P}([X=k])$ est convergente, et donc sa suite des sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}([X=k])\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est convergente. Or comme il s'agit d'une suite à termes positifs qui est croissante, elle est donc majorée par un réel M, c'est à dire que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X=k]) \leq M \text{ et donc en particulier :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([X=k]) \leq M$$

Ainsi, on obtient : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X=2k]) \leq \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}([X=k]) \leq M$

On en déduit donc que la suite des sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}([X=2k])\right)_{N\in\mathbb{N}}$ de la série numérique à termes positifs $\sum \mathbb{P}([X=2k])$ est majorée par un réel M. Par conséquent, la suite des sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}([X=2k])\right)_{N\in\mathbb{N}}$ qui est une suite à termes positifs croissante, est majorée par le réel M. Elle est donc convergente. Ainsi, par définition, la série numérique $\sum \mathbb{P}([X=2k])$ est convergente.

Calcul de la somme de la série numérique $\sum \mathbb{P}([X=2k])$: puisque X suit une loi de Poisson de paramètre λ, on a : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X=k]) = \mathrm{e}^{-\lambda} \times \dfrac{\lambda^k}{k!}$

et donc en particulier : $\quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}([X=2k]) = \mathrm{e}^{-\lambda} \times \dfrac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$.

Par suite, il vient que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=2k]) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$

Or on sait que : $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

et donc que : $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$

Par suite, puisque les deux séries entières $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ et $\sum \dfrac{(-1)^n x^n}{n!}$ sont de rayon de convergence infini, les deux séries numériques $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ et $\sum \dfrac{(-1)^n x^n}{n!}$ convergent pour tout réel x, et il vient que :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x^k}{k!} + \frac{(-1)^k x^k}{k!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^k}{k!} x^k \\
&\underset{1+(-1)^k=\begin{cases} 2 \text{ si } k \text{ pair} \\ 0 \text{ si } k \text{ impair}\end{cases}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2x^{2k}}{(2k)!} \\
&= 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}
\end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que : $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

Par conséquent, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=2k]) &= \mathrm{e}^{-\lambda} \times \frac{\mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{-\lambda}}{2} \\
&= \frac{1+\mathrm{e}^{-2\lambda}}{2}
\end{aligned}$$

(b). Puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on a clairement que $X(\Omega) = \underbrace{\{2k,\, k \in \mathbb{N}\}}_{\mathcal{P}} \cup \underbrace{\{2k+1,\, k \in \mathbb{N}\}}_{\mathcal{I}}$, cette union étant disjointe.

On a donc : $\mathbb{P}([X\in\mathcal{P}])+\mathbb{P}([X\in\mathcal{I}])=1$
Ainsi, X a plus de chance d'être paire, dans le sens où X prend une valeur paire, lorsque $\mathbb{P}([X\in\mathcal{P}])\geq\frac{1}{2}$.

Or on a : $$\begin{aligned}[X \text{ est paire}] &= [X\in\mathcal{P}]\\ &= \bigcup_{k=0}^{+\infty}[X=2k]\end{aligned}$$

Cette réunion étant disjointe, il vient que :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X \text{ est paire}]) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}([X=2k])\\ &= \frac{1+\mathrm{e}^{-2\lambda}}{2}\\ &= \frac{1}{2}+\underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-2\lambda}}{2}}_{\geq 0}\\ &\geq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Par suite, puisque $\mathbb{P}([X \text{ est paire}])\geq\frac{1}{2}$, X a plus de chance d'être paire, dans le sens où X prend une valeur paire.

(2). Convergence de la série numérique $\sum\mathbb{P}([X=2k])$: la série numérique $\sum\mathbb{P}([X=2k])$ est une série numérique à termes positifs telle que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 0\leq\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}([X=2k])\leq\sum_{k=1}^{2n}\mathbb{P}([X=k])$

Puisque X est une variable aléatoire, la série numérique à termes positifs $\sum\mathbb{P}([X=k])$ est convergente, et donc sa suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^{N}\mathbb{P}([X=k])\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Or comme il s'agit d'une suite à termes positifs qui est croissante, elle est donc majorée par un réel M, c'est à dire que l'on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 0\leq\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}([X=k])\leq M \text{ et donc en particulier :}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 1\leq\sum_{k=1}^{2n}\mathbb{P}([X=k])\leq M$$

Ainsi, on obtient : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad 0\leq\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}([X=2k])\leq\sum_{k=1}^{2n}\mathbb{P}([X=k])\leq M$

On en déduit donc que la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^{N}\mathbb{P}([X=2k])\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ de la série numérique à termes positifs $\sum\mathbb{P}([X=2k])$ est majorée par un réel M.

Par conséquent, la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^{N}\mathbb{P}([X=2k])\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ qui est une suite à termes positifs croissante, est majorée par le réel M. Elle est donc convergente.
Ainsi, par définition, la série numérique $\sum\mathbb{P}([X=2k])$ est convergente.

Calcul de la somme de la série numérique $\sum\mathbb{P}([X=2k])$: puisque X suit une loi de géométrique de paramètre p, on a : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X=k])=(1-p)^{k-1}\,p$
et donc en particulier : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{P}([X=2k])=(1-p)^{2k-1}\,p$.

Par suite, il vient que :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}([X=2k]) &= p(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{2k-2}\\ &= p(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty}\left((1-p)^2\right)^{k-1}\\ &= p(1-p)\sum_{k=0}^{+\infty}\left((1-p)^2\right)^{k}\\ &= p(1-p)\times\frac{1}{1-(1-p)^2}\\ &= \frac{p(1-p)}{1-1+2p-p^2}\\ &= \frac{p(1-p)}{p(2-p)}\\ &= \frac{1-p}{2-p}\\ &= \frac{1-p}{1+(1-p)}\end{aligned}$$

Or on a : $0\leq 1-p\leq 1$, donc : $0\leq(1-p)+(1-p)\leq 1+(1-p)$ et ainsi : $0\leq\frac{2(1-p)}{1+(1-p)}\leq 1$

Finalement, on en déduit que : $0\leq\frac{1-p}{1+(1-p)}\leq\frac{1}{2}$.

Par conséquent, il vient : $\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}([X=2k])\leq\frac{1}{2}$.

Étude de $[X$ est paire$]$: Puisque $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, on a clairement que $X(\Omega)=\underbrace{\{2k,\ k\in\mathbb{N}^*\}}_{\mathcal{P}}\cup\underbrace{\{2k+1,\ k\in\mathbb{N}\}}_{\mathcal{I}}$, cette union étant disjointe.

On a donc : $\mathbb{P}([X\in\mathcal{P}])+\mathbb{P}([X\in\mathcal{I}])=1$
Ainsi, X a plus de chance d'être paire, dans le sens où X prend une valeur paire, lorsque $\mathbb{P}([X\in\mathcal{P}])\geq\frac{1}{2}$.

Or on a : $$\begin{aligned}[X \text{ est paire}] &= [X\in\mathcal{P}]\\ &= \bigcup_{k=1}^{+\infty}[X=2k]\end{aligned}$$

Cette réunion étant disjointe, il vient que :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X \text{ est paire}]) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}([X=2k])\\ &= \frac{1-p}{1+(1-p)}\\ &\leq \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Par suite, puisque $\mathbb{P}([X \text{ est paire}])\leq\frac{1}{2}$, X a plus de chance d'être impaire, dans le sens où X prend une valeur impaire.