Exercice| [1271] | 1| Théorème du transfert

Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ et soit α un réel strictement positif. Montrer que la variable aléatoire $Y = \alpha^X$ admet une espérance et la calculer.

Pistes de réflexion

— Il s'agit de mobiliser ici le théorème de transfert pour les variables aléatoires discrètes.

Éléments de correction

Puisque X est une variable aléatoire discrète, d'après le théorème de transfert, la variable aléatoire $Y = \alpha^X$ admet une espérance si la série numérique $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \alpha^x \times \mathbb{P}([X = x])$ est absolument convergente, et si c'est le cas, son espérance sera égale à la somme de cette série numérique.

Existence de l'espérance de Y : il s'agit donc d'étudier la convergence absolue de la série numérique $\sum \alpha^k \times \mathbb{P}([X = k])$, c'est à dire la série numérique $\sum \alpha^k \times \dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$ ou encore tout simplement $\mathrm{e}^{-\lambda} \sum \dfrac{(\alpha\lambda)^k}{k!}$. Or la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ est de rayon de convergence égal à $+\infty$ et pour somme la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$, ce qui signifie notamment que la série numérique $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ est une série absolument convergente quelque soit $x \in \mathbb{R}$, et donc en particulier pour $x = \alpha\lambda$.

Par conséquent la série numérique $\sum \alpha^k \times \mathbb{P}([X = k])$ est absolument convergente, donc convergente.

Calcul de $\mathbb{E}(Y)$: par définition $\mathbb{E}(Y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^k \mathbb{P}([X = k])$. Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k \times \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha\lambda)^k}{k!}}_{=\mathrm{e}^{\alpha\lambda} \text{ car : } \forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^{x}} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \times \mathrm{e}^{\alpha\lambda} \\
&= \mathrm{e}^{\lambda(\alpha - 1)}
\end{aligned}$$