Exercice| [1269] | 1| Variables aléatoires

Soit n un entier naturel non nul. On dispose d'une boîte B contenant n boules numérotées de 1 à n et de n boîtes $B_1, \dots, B_n$. Pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$, la boîte B_k contient k boules numérotées de 1 à k. On tire au hasard une boule de B, puis k désignant le numéro de la boule obtenue, on tire au hasard une boule dans B_k.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue à l'issue du deuxième tirage.
Déterminer la loi de X, puis son espérance.

Éléments de correction

Soit Y le numéro aléatoire obtenu en tirant dans la boîte B.
La variable aléatoire Y suit la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$ et, par application de la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![1;n]\!], \mathbb{P}(X=k) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y=i) \times \mathbb{P}_{[Y=i]}([X=k]) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{[Y=i]}([X=k]) \end{aligned}$$

Or la boîte B_i contient i boules dont les numéros vont de 1 à i ; on a donc $\mathbb{P}_{[Y=i]}([X=k]) = 0$ si $k > i$ et $\mathbb{P}_{[Y=i]}([X=k]) = \dfrac{1}{i}$ si $k \leq i$. On a en déduit que :

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![1;n]\!], \mathbb{P}(X=k) &= \frac{1}{n}\sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i} \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

On a :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Plus en détails :

$$\begin{aligned} n\mathbb{E}(X) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \\ + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}\right) \\ + 3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}\right) + \dots + n\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

et regroupant les termes :

$$\begin{aligned} n\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{1} \times 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \dots + \frac{1}{n}(1+2+\dots+n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(1+2+\dots+k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \times \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k+1) \end{aligned}$$

ou encore :
$$\begin{aligned} n\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n+1} j \\ &= \frac{1}{2}\left(-1 + \sum_{j=1}^{n+1} j\right) = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}\right) \end{aligned}$$

et qui donne $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+3}{4}$.