Exercice| [1267] | 1| Variables aléatoires

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. On tire les boules une à une et sans remise. On s'arrête dès que le numéro tiré est strictement supérieur à un numéro tiré précédemment. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
Préciser $X(\Omega)$, puis déterminer $\mathbb{P}([X>2])$ et $\mathbb{P}([X=2])$.
Pour $k \geq 2$, préciser l'événement $[X>k]$ et en déduire la loi de X.

Pistes de réflexion

- Pour le support de X, on constatera que l'on doit au moins tirer deux boules. . .
- On prendra le parti de vider complètement l'urne bien que l'on ait gagné pour s'intéresser aux événements $[X>k]$.
- On récupèrera ensuite la loi de X en s'inspirant de l'obtention de la loi d'une variable aléatoire finie à partir de sa fonction de répartition.

Éléments de correction

- Il faut évidemment faire au moins deux tirages et on est obligé de s'arrêter (faute boules) au maximum au bout de n tirages. Donc $X(\Omega) \subset [\![2;n]\!]$. D'autre part, si $k \in [\![2;n]\!]$, on peut obtenir la suite de tirage $k-1$, $k-2$,. . . , 2, 1 et on s'arrêtera u tirage suivant. D'où $X(\Omega) = [\![2;n]\!]$.
- Convenons de vider l'urne, même après avoir perdu.
  L'univers associé à cette expérience est l'ensemble de toutes les permutations $(\sigma(1),\ldots,\sigma(n))$ de l'ensemble $[\![1;n]\!]$, muni de l'équiprobabilité, $\sigma(i)$ étant le numéro de la boule obtenue au i^{e}tirage.
  Soit $k \in [\![2;n-1]\!]$. Cherchons combien de permutations réalisent $X>k$:
  - on choisit k éléments parmi les n de $\binom{n}{k}$ façons pour former les k premiers termes de la liste $(\sigma(1),\ldots,\sigma(n))$,
  - il faut ranger ces éléments dans l'ordre décroissant (sinon il y aurait un rang $\leq k$, om l'on obtiendrait un numéro plus grand qu'un numéro obtenu antérieurement). Il n'y a donc qu'une façon de les ranger ;
  - on complète alors la permutation en rangeant les autres numéros de $(n-k)!$ façons.

  Ainsi : $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X>k) &= \frac{\binom{n}{k}\times(n-k)!}{n!}\\ &= \frac{1}{k!}\end{aligned}$$
  Cette forme est entre autre valable pour $k=1$, mais pas pour $k=n$. En particulier : On a : $\mathbb{P}(X>2) = \dfrac{1}{2}$ et ainsi : $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=2) &= 1-\mathbb{P}(X>2)\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$
  De même $\mathbb{P}(X>3) = \dfrac{1}{6}$ et comme $\mathbb{P}(X>2) = \mathbb{P}(X=3)+\mathbb{P}(>3)$ on en déduit que $\mathbb{P}(X=3) = \dfrac{1}{3}$.
  Plus généralement :
  $$\begin{aligned}\forall k \in [\![2;n-1]\!],\ \mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}(X>k-1)-\mathbb{P}(X>k)\\ &= \frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\end{aligned}$$
  et : $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=n) &= \mathbb{P}(X>n-1)\\ &= \frac{1}{(n-1)!}\end{aligned}$$