EX. 1 | Réf. 1263

Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Les résultats de X sont affichés par un compteur détraqué :
— si X prend une valeur comprise entre 1 et $n-1$, le compteur affiche la bonne valeur de X ;
— pour $X=0$ ou $X=n$, le compteur affiche un nombre au hasard compris entre 1 et $n-1$.

1. Quelle est, en moyenne, la valeur affichée par le compteur ?
2. Quelle est la probabilité que le compteur affiche la valeur prise par X ?

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 1263

Soit Y la variable aléatoire égale au résultat affiché par le compteur. On a $Y(\Omega) = [\![1; n-1]\!]$.

1. Utilisons la formule des probabilités totales et le système complet d'événements $(X=i)_{i\in[\![0;n]\!]}$:

$$\forall k \in [\![1; n-1]\!], \quad \mathbb{P}(Y=k) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(Y=k|X=i)\,\mathbb{P}(X=i)$$

Or Y ne peut prendre la valeur k que si X prend une des valeurs 0, k et n, et :

$$\mathbb{P}(Y=k|X=k)=1, \quad \mathbb{P}(Y=k|X=0) = \mathbb{P}(Y=k|X=n) = \frac{1}{n-1}$$

d'où $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(X=k) + \dfrac{1}{n-1}\left(\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=n)\right) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k} + \dfrac{p^n+q^n}{n-1}$. Le nombre moyen affiché par le compteur détraqué est égal à l'espérance de Y :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\binom{n}{k}p^k q^{n-k} + \frac{p^n+q^n}{n-1}\right)$$

Pour calculer cette espérance, faisons apparaître la formule de l'espérance de la loi binomiale :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} - np^n + \frac{p^n+q^n}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} k = np - np^n + \frac{p^n+q^n}{n-1}\frac{(n-1)n}{2} = np + \frac{n}{2}(q^n - p^n)$$

2. La probabilité que le compter affiche la valeur de X est égale à $1 - (\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=n)) = 1-(p^n+q^n)$.