EX. 1 | Réf. 1261

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. Soit n un entier compris entre 1 et N. On tire au hasard et simultanément n boules de l'urne (donc sans remise). On note Y la variable aléatoire égale au plus petit numéro tiré.

1. Combien y a-t-il de poignées de n boules possibles ?

2. Quelles sont les valeurs que peut prendre Y ?

3. Combien y a-t-il de poignées telles que $Y \geq k$? En déduire $\mathbb{P}(Y \geq k)$?

4. Déterminer la loi de Y.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 1261

1. Il y en a $\binom{N}{n}$ toutes équiprobables.

2. $Y(\Omega) = [\![1; N-n+1]\!]$, en effet puisque l'on prend n boules, k est un plus petit numéro obtenu possible si et seulement si l'ensemble $\{k, k+1, \ldots, N\}$ contient au moins n éléments, ce qui correspond à $k \in [\![1; N-n+1]\!]$.

3. $Y \geq k$ est réalisé si et seulement si toutes les boules tirées portent un numéro supérieur ou égal à k ; il y a $N-k+1$ boules dont le numéro est compris entre k et N donc :

$$\forall k \in [\![N-n+1;]\!] \ \mathbb{P}(Y \geq k) = \frac{\binom{N-k+1}{n}}{\binom{N}{n}}$$

4. — Si $1 \leq k \leq N-n+1$, $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y \geq k) - \mathbb{P}(Y \geq k+1)$ et par la formule de Pascal $\mathbb{P}(Y = k) = \dfrac{\binom{N-k+1}{n} - \binom{N-k}{n}}{\binom{N}{n}} = \dfrac{\binom{N-k}{n-1}}{\binom{N}{n}}$.

— Si $k = N-n+1$, $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y \geq k) = \dfrac{1}{\binom{N}{n}}$.

On peut aussi raisonner directement : $Y = k$ est réalisé si et seulement si la poignée contenant la boule n° k et $n-1$ autres boules dont le numéri est compris entre $k+1$ et N, donc à prendre parmi $N-k$.