Exercice| [1258] | 1| Utilisation des probabilités conditionnelles

On dispose de deux dés A et B. Le dé A possède quatre faces rouges et deux faces blanches. Le dé B a deux faces rouges et quatre faces blanches. On lance une pièce de monnaie équilibrée. Si l'on obtient « pile », on décide de jouer uniquement avec le dé A, et si on obtient « face » on décide de jouer uniquement avec le dé B.

(1). Calculer la probabilité d'obtenir rouge à un lancer quelconque d'un dé.

(2). Calculer la probabilité d'obtenir rouge au troisième lancer, sachant que l'on a déjà obtenu cette couleur aux deux premiers lancers.

(3). Déterminer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dé A, sachant que l'on a obtenu rouge aux n premiers lancers ($n \geq 1$).

Pistes de réflexion

(1). On pourra remarquer que le fait de jouer avec l'un des deux dés permet de définir un système complet d'événements que l'on utilisera pour déterminer la probabilité d'obtenir un rouge au n^{e} lancer.

(2). Il s'agira d'utiliser la définition d'une probabilité conditionnelle et d'utiliser le système complet d'événements précédemment utilisé en discutant notamment sur l'indépendance des résultats obtenus lors de lancrs successifs dès lors que le dé a été choisi.

(3). On pourra « retourner la probabilité condionnelle » en utilisant ou non la formule de Bayes.

Éléments de correction

Dans tout ce qui suit, on définiti les événements suivants :

A **:** « on joue avec le dé A »

B **:** « on joue avec le dé B »

R_i **où** $i \in \mathbb{N}^*$ **:** « on a obtenu du rouge lors de i^{e}lancer »

(1). Il s'agit donc de déterminer $\mathbb{P}(R_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. La famille d'événements $\{A, B\}$ forme un système complet d'événements de probabilité non nulle. Aussi d'après la formule des probabilités totales, il vient que :

$$\begin{aligned}
\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(R_i) &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(R_i) + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(R_i) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(2). Il s'agit donc de déterminer ici $\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3)$. Par définition d'une probabilité conditionnelle, il vient :

$$\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3) = \frac{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{\mathbb{P}(R_1 \cap R_2)}$$

Or toujours en utilisant le système complet d'événement $\{A, B\}$ et à l'aide de la formule des probabilités totales, il vient que :

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(R_1 \cap R_2) + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(R_1 \cap R_2)$$

$$\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(R_1 \cap R_2 \cap R_3) + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(B)\, R_1 \cap R_2 \cap R_3,$$

Dès lors que le dé à lancer à été choisi, on peut considérer que les résultats obtenus lors de lancers successifs sont indépendants les uns des autres pour les lois de probabilités $\mathbb{P}_A$ et $\mathbb{P}_B$, et ainsi que l'on a :

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathbb{P}_A(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(R_1) \times \mathbb{P}_A(R_2) \\
\mathbb{P}_B(R_1 \cap R_2) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(R_1) \times \mathbb{P}_B(R_2)
\end{array}\right.$$

Sur le même principe, on établierait que :

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathbb{P}_A(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \mathbb{P}_A(R_1) \times \mathbb{P}_A(R_2) \times \mathbb{P}_A(R_3) \\
\mathbb{P}_B(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \mathbb{P}_B(R_1) \times \mathbb{P}_B(R_2) \times \mathbb{P}_B(R_3)
\end{array}\right.$$

Finalement, il vient que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3) &= \frac{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(R_1) \times \mathbb{P}_A(R_2) \times \mathbb{P}_A(R_3) + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(R_1) \times \mathbb{P}_B(R_2) \times \mathbb{P}_B(R_3)}{\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(R_1) \times \mathbb{P}_A(R_2) + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(R_1) \times \mathbb{P}_B(R_2)} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{6}\right)^3 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{6}\right)^3}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{6}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{6}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{6}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{4^3}{6} + \frac{2^3}{6}}{4^2 + 2^2} \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{2^6 + 2^3}{2^4 + 2^2} \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{2^4 + 2}{2^2 + 1} \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{18}{5} \\
&= \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

(3). Il s'agit donc ici de déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{R_1 \cap \ldots R_n}(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après la définition d'une probabilité conditionnelle, on a : $\mathbb{P}_{R_1 \cap \ldots \cap R_n}(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap R_1 \cap \ldots R_n)}{\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_n)}$

Sur le même principe que dans la question précédente, on montrerait que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_1 \cap \ldots \cap R_n) &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(R_1 \cap \ldots \cap R_n) + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(R_1 \cap R_n) \\
&= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(R_1) \times \ldots \mathbb{P}_A(R_n) + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(R_1) \times \ldots \times \mathbb{P}_B(R_n) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{6}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{6}\right)^n \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cap R_1 \cap \ldots R_n) &= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(R_1 \cap \ldots \cap R_n) \\
&= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(R_1) \times \ldots \mathbb{P}_A(R_n) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{6}\right)^n \\
&= \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

Finalement, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{R_1 \cap \ldots \cap R_n}(A) &= \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)} \\
&= \frac{2^n}{2^n + 1}
\end{aligned}$$