Exercice| [1257] | 1| Probabilités conditionnelles

Sur 100 dés, il y en a 25 qui sont pipés. La probabilités d'obtenir un 6 avec un dé pipé est $\frac{1}{2}$.

(1). On choisit un dé, et on le lance. Quelle est la probabilité d'avoir lancé un dé pipé sachant que l'on a obtenu un 6 ?

(2). On relance le dé et l'on obtient encore un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

Pistes de réflexion

(1). On pourra utiliser la formule de Bayes avec le système complet d'événements construit à partir des deux types de dés disponibles ou repartir de la définition d'une probabilité conditionnelle et redémontrer la formule de Bayes dans ce cas particulier.

(2). La démarche entreprise à la première question s'étend ici pour le calcul de la probabilité demandée. Il faudra s'intéresser à l'indépendance éventuelle de deux lancers successifs dès lors que le dé a été choisi.

Éléments de correction

Dans tous les éléments qui suivent, on définit les événements suivants par :

S_k **:** « on a obtenu le 6 au $k$elancer »

P **:** « on joue avec un dé pipé »

(1). Il s'agit donc de déterminer ici la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{S_1}(P)$. Par définition d'une probabilité conditionnelle on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{S_1}(P) &= \frac{\mathbb{P}(S_1 \cap P)}{\mathbb{P}(S_1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(P) \times \mathbb{P}_P(S_1)}{\mathbb{P}(S_1)}\end{aligned}$$

En utilisant le système complet d'événements $\{P, \overline{P}\}$ qui sont de probabilités non nulles, d'après la formule des probabilités totales, il vient que :

$$\mathbb{P}(S_1) = \mathbb{P}(T) \times \mathbb{P}_T(S_1) + \mathbb{P}(\overline{T}) \times \mathbb{P}_{\overline{T}}(S_1)$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{S_1}(T) &= \frac{\mathbb{P}(P) \times \mathbb{P}_P(S_1)}{\mathbb{P}(T) \times \mathbb{P}_T(S_1) + \mathbb{P}(\overline{T}) \times \mathbb{P}_{\overline{T}}(S_2)} \\ &= \frac{\frac{25}{100} \times \frac{1}{2}}{\frac{25}{100} \times \frac{1}{2} + \frac{75}{100} \times \frac{1}{6}} \\ &= \frac{25 \times \frac{1}{2}}{25 \times \frac{1}{2} + \frac{75}{6}} \\ &= \frac{25}{25 + 25} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(2). Il s'agit donc ici de calculer $\mathbb{P}_{S_1 \cap S_2}(T)$. Par définition d'une probabilité conditionnelle, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{S_1 \cap S_2}(T) &= \frac{\mathbb{P}(T \cap S_1 \cap S_2)}{\mathbb{P}(S_1 \cap S_2)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(T)\,\mathbb{P}_T(S_1 \cap S_2)}{\mathbb{P}(S_1 \cap S_2)}\end{aligned}$$

En utilisant le système complet d'événements $\{P, \overline{P}\}$ qui sont de probabilités non nulles, d'après la formule des probabilités totales, il vient que :

$$\mathbb{P}(S_1 \cap S_2) = \mathbb{P}(T) \times \mathbb{P}_T(S_1 \cap S_2) + \mathbb{P}(\overline{T}) \times \mathbb{P}_{\overline{T}}(S_1 \cap S_2)$$

Ainsi, on a : $\mathbb{P}_{S_1 \cap S_2}(T) = \dfrac{\mathbb{P}(T) \times \mathbb{P}_T(S_1 \cap S_2)}{\mathbb{P}(T) \times \mathbb{P}_T(S_1 \cap S_2) + \mathbb{P}(\overline{T}) \times \mathbb{P}_{\overline{T}}(S_1 \cap S_2)}$

Dès lors que le dé à été choisi, on peut considérer les lancers successifs comme indépendants les uns des autres par rapport aux lois de probabilité $\mathbb{P}_T$ et $\mathbb{P}_{\overline{T}}$, et par suite on a :

$$\begin{cases}\mathbb{P}_T(S_1 \cap S_2) = \mathbb{P}_T(S_1) \times \mathbb{P}_T(S_2) \\ \mathbb{P}_{\overline{T}}(S_1 \cap S_2) = \mathbb{P}_{\overline{T}}(S_1) \times \mathbb{P}_{\overline{T}}(S_2)\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{S_1 \cap S_2}(T) &= \frac{\mathbb{P}(T) \times \mathbb{P}_T(S_1) \times \mathbb{P}_T(S_2)}{\mathbb{P}(T) \times \mathbb{P}_T(S_1) \times \mathbb{P}_T(S_2) + \mathbb{P}(\overline{T}) \times \mathbb{P}_{\overline{T}}(S_1) \times \mathbb{P}_{\overline{T}}(S_2)} \\ &= \frac{\frac{25}{100} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{25}{100} \times \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{75}{100} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}} \\ &= \frac{25 \times \frac{1}{4}}{25 \times \frac{1}{4} + \frac{75}{9}} \\ &= \frac{25}{25 + \frac{25}{3}} \\ &= \frac{75}{75 + 25} \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$