Exercice| [1253] | 1| Indpéndance d'un couple de variables aléatoires

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n avec $n \geq 2$. On effectue deux tirages d'une boule avec remise dans cette urne. Soit X (resp. Y) la variable aléatoire égale au plus petit (resp. plus grand) des deux numéros tirés.

(1). Déterminer la loi du couple (X, Y) et en déduire les loi de X et Y.

(2). Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

(3). X et Y sont-elles indépendantes ?

Pistes de réflexion

(1). On pourra dans un premier temps déterminer les supports de X et Y. On remarquera que les lancers sont indépendants pour exprimer chaque événement $[X = i]$ ou $[Y = j]$ à l'aide du résultat de chacun des deux lancers.

(2). On justifie l'existence des espérances puis on utilise la définition pour les calculer.

(3). Il suffit de trouver (i, j) tel que $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \neq \mathbb{P}([X = i]) \times \mathbb{P}([Y = j])$.

Éléments de correction

(1). **Support de X :** il est possible de tirer lors d'un des deux tirages de prélever la boule numérotée 1 comme se trouver dans la situation où lors des deux tirages prélever la boule numérotée n. Par suite $X(\Omega) = [\![1; n]\!]$.

Support de Y : il est possible lors d'un des deux tirages de prélever la boule numérotée n comme se trouver dans la situation où lors des deux tirages prélever la boule numérotée 1. Par suite $Y(\Omega) = [\![1; n]\!]$.

Loi du couple (X, Y) : soit $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Si $i > j$: on a directement que : $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = 0$

Si $i = j$: on a :

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = i]) = \mathbb{P}([X = i]) \times \mathbb{P}_{[X=i]}([Y = i]) \underset{\substack{\textbf{tirage}\\\textbf{avec remise}}}{=} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

Si $i < j$: on désigne respectivement par X_1 et X_2 les variables aléatoires égales au résultat du premier et du deuxième tirage.

On a alors : $[X = i] \cap [Y = j] = ([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) \cup ([X_1 = j] \cap [X_2 = i])$

Puisque cette réunion est clairement disjointe, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) &= \mathbb{P}(([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) \cup ([X_1 = j] \cap [X_2 = i])) \\
&= \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) + \mathbb{P}([X_1 = j] \cap [X_2 = i]) \\
&= \mathbb{P}([X_1 = i]) \times \mathbb{P}_{[X_1=i]}([X_2 = j]) + \mathbb{P}([X_1 = j]) \times \mathbb{P}_{[X_2=} \\
&\underset{\substack{\textbf{tirage}\\\textbf{avec remise}}}{=} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \\
&= \frac{2}{n^2}
\end{aligned}$$

Récapitulatif dans un tableau de loi : en notant $a = \dfrac{1}{n}$, on peut récapituler la loi du couple (X, Y) dans le tableau ci-dessous :

$X \backslash Y$	1	2	...	$n-1$	n
1	a	$2a$	...	$2a$	$2a$
2	0	a	$\ddots$	$2a$	$2a$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	0	0	$\ddots$	a	$2a$
n	0	0	$\ddots$	0	a

Loi de X : les événements $([Y = j])_{j \in [\![1;n]\!]}$ formant un système complet d'événements, il vient :

$$\begin{aligned}
\forall i \in [\![1; n]\!], \quad \mathbb{P}([X = i]) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&= \sum_{j=i}^{n} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&= \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = i]) + \sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&= \frac{1}{n^2} + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} \times (n - (i + 1) - 1) \\
&= \frac{1}{n^2} + \frac{2(n - i)}{n^2} \\
&= \frac{2n - 2i + 1}{n^2}
\end{aligned}$$

Loi de Y : les événements $([X = i])_{i \in [\![1;n]\!]}$ formant un système complet d'événements, il vient :

$$\begin{aligned}
\forall j \in [\![1; n]\!], \quad \mathbb{P}([Y = j]) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&= \sum_{i=1}^{j} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&= \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = i]) + \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \\
&= \frac{1}{n^2} + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{2}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} \times ((j - 1) - 1 + 1) \\
&= \frac{1}{n^2} + \frac{2(j - 1)}{n^2} \\
&= \frac{2j - 1}{n^2}
\end{aligned}$$

(2). **Existence d'une espérance pour X et Y :** X et Y étant deux variables aléatoires finies, elles admettent donc une espérance.

Calcul de $\mathbb{E}(X)$: puisque $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$, il vient que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{n} i \times \mathbb{P}([X=i]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i \times \frac{2n-2i+1}{n^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n} i - \frac{2}{n^2} i^2 + \frac{1}{n^2} i \right) \\
&= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} i - \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1} i \\
&= \frac{2}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{2}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\
&= n+1 - \frac{(n+1)(2n+1)}{3n} + \frac{n+1}{2n} \\
&= (n+1)\left(1 - \frac{2n+1}{3n} + \frac{1}{2n}\right) \\
&= (n+1) \times \frac{6n-4n-2+3}{6n} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}
\end{aligned}$$

Calcul de $\mathbb{E}(Y)$: puisque $Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$, il vient que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{j=1}^{n} j \times \mathbb{P}([Y=j]) \\
&= \sum_{j=1}^{n} j \times \frac{2j-1}{n^2} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{2}{n^2} j^2 - \frac{1}{n^2} j \right) \\
&= \frac{2}{n^2} \sum_{j=1}^{n} j^2 - \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} j \\
&= \frac{2}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{3n} - \frac{n+1}{2n} \\
&= (n+1)\left(\frac{2n+1}{3n} - \frac{1}{2n}\right) \\
&= (n+1) \times \frac{4n+2-3}{6n} \\
&= \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}
\end{aligned}$$

(3). X et Y ne sont pas indépendantes, puisque l'on a $\mathbb{P}([X=2] \cap [Y=1]) = 0$ et $\mathbb{P}([X=2]) \times \mathbb{P}([Y=1]) \neq 0$.

(1). On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$, les tirages s'effectuant avec remise, il y a n^2 tirages possibles tous équiprobables et en faisant attention au fait que si $i < j$, l'événement $(X=i) \cap (Y=j)$ peut s'obtenir de deux façons :

$$\mathbb{P}((X=i) \cap (Y=j)) = \begin{cases} 0 \text{ si } i > j \\ \dfrac{1}{n^2} \text{ si } i = j \\ \dfrac{2}{n^2} \text{ si } i < j \end{cases}$$

soit en posant $a = \dfrac{1}{n^2}$:

$X \backslash Y$	1	2	$\dots$	$n-1$	n
1	a	$2a$	$\dots$	$2a$	$2a$
2	0	a	$\ddots$	$2a$	$2a$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	0	0	$\ddots$	a	$2a$
n	0	0	$\ddots$	0	a

— Sur la ligne correspondant à $X = k$, il y a $(n-k)$ termes égaux à $2a$ et un terme égal à a :

$$\forall k \in [\![1;n]\!] \ \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n^2} + (n-k)\frac{2}{n^2} = \frac{2n-2k+1}{n^2}$$

— Sur la colonne correspondant à $Y = k$, il y a $k-1$ termes égaux à $2a$ et un terme égal à a :

$$\forall k \in [\![1;n]\!] \ \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n^2} + (k-1)\frac{2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}$$

(2). — $\mathbb{E}(X) = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}$

— $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{(n+1)(4n-1)}{6n}$ que l'on peut calculer directement ou en utilisant $X + Y = N_1 + N_2$ où N_i est le résultat du i^e tirage. N_i suivant une loi uniforme on a $\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(N_1) + \mathbb{E}(N_2)$ d'où $\mathbb{E}(Y) = n + 1 - \mathbb{E}(X)$ et le résultat.

(3). X et Y ne sont pas indépendantes, puisque $p(X=2) \cap (Y=1) = 0$ et $\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=1) \neq 0$.