Exercice| [1252] | 1| Covariance d'un couple de variables aléatoires

Dix boules numérotées de 1 à 10 sont placées dans une urne. On tire une boule au hasard, on note Y le reste de la division par 2 du numéro de la boule tirée et Z le reste de la division par 3 du numéro de la boule tirée.

(1). Donner la loi du couple (Y, Z).

(2). Calculer $\mathrm{Cov}(Y, Z)$.

Pistes de réflexion

(1). On commencera par identifier le support de Y et Z. On pourra s'aider de la variable aléatoire X égale au numéro de la boule obtenue lors du tirage pour décrire les événements $[Y = j]$, $[Z = k]$ et $[Y = j] \cap [Z = k]$.

(2). Il s'agit de calculer $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(Z)$ puis $\mathbb{E}(YZ)$ dans le cas de variables aléatoires finies en ayant au préalable déterminé les lois de Y et Z.

Éléments de correction

(1). On désigne par X la variable aléatoire égale du numéro de la boule tirée de l'urne. Il est clair que $X(\Omega) = [\![1; 10]\!]$ et que X suit la loi uniforme sur $[1; 10]$.

Support de Y : le reste de la division euclidienne d'un entier quelconque par 2 est un élément de $\{0, 1\}$. Ainsi $Y(\Omega) = \{0, 1\}$.

En particulier on a :
$$\begin{aligned}[Y = 0] &= [X = 2] \cup [X = 4] \cup [X = 6] \\ &\quad \cup [X = 8] \cup [X = 10] \\ \text{et } [Y = 1] &= [X = 1] \cup [X = 3] \cup [X = 5] \\ &\quad \cup [X = 7] \cup [X = 9]\end{aligned}$$

ces différentes unions étant disjointes puisque $([X = k])_{k \in [\![1;10]\!]}$ forme un système complet d'événements.

Support de Z : le reste de la division euclidienne d'un entier quelconque par 3 est un élément de $\{0, 1, 2\}$. Ainsi $Z(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

En particulier, on a :
$$\begin{aligned}[Z = 0] &= [X = 3] \cup [X = 6] \cup [X = 9] \\ \text{et } [Z = 1] &= [X = 1] \cup [X = 4] \cup [X = 7] \\ &\quad \cup [X = 10] \\ \text{ainsi que : } [Z = 2] &= [X = 2] \cup [X = 5] \cup [X = 8]\end{aligned}$$

ces différentes unions étant disjointes puisque $([X = k])_{k \in [\![1;10]\!]}$ forme un système complet d'événements.

Loi du couple (Y, Z) : il s'agit de déterminer $\mathbb{P}([Y = j] \cap [Z = k])$ pour tout $(j, k) \in \{0, 1\} \times \{0, 1, 2\}$.

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}([Y = 0] \cap [Z = 0]) \\ =\ & \mathbb{P}(([X = 2] \cup [X = 4] \cup [X = 6] \cup [X = 8] \cup [X = 10]) \cap ([X = 3] \cup [X = 6] \cup [X = 9])) \\ =\ & \mathbb{P}([X = 6]) \\ =\ & \frac{1}{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}([Y = 0] \cap [Z = 1]) \\ =\ & \mathbb{P}(([X = 2] \cup [X = 4] \cup [X = 6] \cup [X = 8] \cup [X = 10]) \cap ([X = 1] \cup [X = 4] \cup [X = 7] \cup [X = 10])) \\ =\ & \mathbb{P}([X = 4] \cup [X = 10]) \\ =\ & \mathbb{P}([X = 4]) + \mathbb{P}([X = 10]) \\ =\ & \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \\ =\ & \frac{1}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}([Y = 0] \cap [Z = 2]) \\ =\ & \mathbb{P}(([X = 2] \cup [X = 4] \cup [X = 6] \cup [X = 8] \cup [X = 10]) \cap ([X = 2] \cup [X = 5] \cup [X = 8])) \\ =\ & \mathbb{P}([X = 2] \cup [X = 8]) \\ =\ & \mathbb{P}([X = 2]) + \mathbb{P}([X = 8]) \\ =\ & \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \\ =\ & \frac{1}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}([Y = 1] \cap [Z = 0]) \\ =\ & \mathbb{P}(([X = 1] \cup [X = 3] \cup [X = 5] \cup [X = 7] \cup [X = 9]) \cap ([X = 3] \cup [X = 6] \cup [X = 9])) \\ =\ & \mathbb{P}([X = 3] \cup [X = 9]) \\ =\ & \mathbb{P}([X = 3]) + \mathbb{P}([X = 9]) \\ =\ & \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \\ =\ & \frac{1}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}([Y = 1] \cap [Z = 1]) \\ =\ & \mathbb{P}(([X = 1] \cup [X = 3] \cup [X = 5] \cup [X = 7] \cup [X = 9]) \cap ([X = 1] \cup [X = 4] \cup [X = 7] \cup [X = 10])) \\ =\ & \mathbb{P}([X = 1] \cup [X = 7]) \\ =\ & \mathbb{P}([X = 1]) + \mathbb{P}([X = 7]) \\ =\ & \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \\ =\ & \frac{1}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}([Y = 1] \cap [Z = 2]) \\ =\ & \mathbb{P}(([X = 1] \cup [X = 3] \cup [X = 5] \cup [X = 7] \cup [X = 9]) \cap ([X = 2] \cup [X = 5] \cup [X = 8])) \\ =\ & \mathbb{P}([X = 5]) \\ =\ & \frac{1}{10}\end{aligned}$$

On récapitule alors ces résultats dans un tableau de loi conjointe :

$Y \backslash Z$	0	1	2
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

(2). **Espérance de Y :** puisque Y est une variable aléatoire finie, elle admet une espérance $\mathbb{E}(Y)$ qui vaut $\mathbb{E}(Y) = \displaystyle\sum_{j \in Y(\Omega)} j \times \mathbb{P}([Y = j])$.

La loi de Y est une des deux lois marginales du couple de variables aléatoires (Y, Z). Les événements $[Z = 0]$, $[Z = 1]$ et $[Z = 2]$ formant un système complet d'événements, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y = 0]) &= \mathbb{P}([Y = 0] \cap [Z = 0]) + \mathbb{P}([Y = 0] \cap [Z = 1]) \\ &\quad + \mathbb{P}([Y = 0] \cap [Z = 2]) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{2}{10} \\ &= \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}([Y = 1]) &= \mathbb{P}([Y = 1] \cap [Z = 0]) + \mathbb{P}([Y = 1] \cap [Z = 1]) \\ &\quad + \mathbb{P}([Y = 1] \cap [Z = 2]) \\ &= \frac{2}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

On peut récapituler ces résultats dans un tableau de loi pour Y :

j	0	1
$[Y=j]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Par suite on en déduit que : $$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{j\in Y(\Omega)} j\times \mathbb{P}([Y=j]) \\ &= 0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Espérance de Z : puisque Z est une variable aléatoire finie, elle admet une espérance $\mathbb{E}(Z)$ qui vaut $\mathbb{E}(Z) = \sum_{k\in Z(\Omega)} k\times\mathbb{P}([Z=k])$.

La loi de Z est une des deux lois marginales du couple de variables aléatoires (Y,Z). Les événements $[Y=0]$, et $[Z=1]$ formant un système complet d'événements, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z=0]) &= \mathbb{P}([Z=0]\cap[Y=0])+\mathbb{P}([Z=0]\cap[Y=1]) \\ &= \frac{1}{10}+\frac{1}{5} \\ &= \frac{3}{10} \\ \mathbb{P}([Z=1]) &= \mathbb{P}([Z=1]\cap[Y=0])+\mathbb{P}([Z=1]\cap[Y=1]) \\ &= \frac{1}{5}+\frac{1}{5} \\ &= \frac{2}{5} \\ \mathbb{P}([Z=2]) &= \mathbb{P}([Z=1]\cap[Y=0])+\mathbb{P}([Z=1]\cap[Y=1]) \\ &= \frac{1}{5}+\frac{1}{10} \\ &= \frac{3}{10}\end{aligned}$$

On peut récapituler ces résultats dans un tableau de loi pour Z :

k	0	1	2
$[Z=k]$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$

Par suite on en déduit que : $$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \sum_{k\in Z(\Omega)} z\times\mathbb{P}([Z=k]) \\ &= 0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{3}{10} \\ &= 1\end{aligned}$$

Espérance de YZ : puisque Y et Z sont deux variables aléatoires finies, la variable aléatoire YZ admet une espérance qui est $\mathbb{E}(YZ) = \sum_{(j,k)\in Y(\Omega)\times Z(\Omega)} j\times k\times \mathbb{P}([Y=j]\cap[Z=k])$.

Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(YZ) &= \sum_{(j,k)\in Y(\Omega)\times Z(\Omega)} j\times k\times\mathbb{P}([Y=j]\cap[Z=k]) \\ &= \underbrace{0\times 0\times\mathbb{P}([Y=0]\cap[Z=0])}_{=0}+\underbrace{0\times 1\times\mathbb{P}([Y=0]\cap[Z=1])}_{=0} \\ &\quad +\underbrace{0\times 2\times\mathbb{P}([Y=0]\cap[Z=2])}_{=0}+\underbrace{1\times 0\times\mathbb{P}([Y=1]\cap[Z=0])}_{=0} \\ &\quad +1\times 1\times\mathbb{P}([Y=1]\cap[Z=1])+1\times 2\times\mathbb{P}([Y=1]\cap[Z=2]) \\ &= 1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{10} \\ &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

Calcul de $\mathrm{Cov}(Y,Z)$: on sait que $\mathrm{Cov}(Y,Z)=\mathbb{E}(YZ)-\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)$. Ainsi, on a :
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y,Z) &= \mathbb{E}(YZ)-\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) \\ &= \frac{2}{5}-\frac{1}{2}\times 1 \\ &= -\frac{1}{10}\end{aligned}$$