Exercice| [1249] | 1| Étude de l'indépendance de deux événements

On dispose de deux dés D_1 et D_2 équilibrés. Les faces de D_1 sont numérotées de 1 à 6, tandis que D_2 possède 5 faces portant le numéro 1 et une face portant le numéro 6. On choisit au hasard un dé, et on le lance deux fois. On considère les événements :
— E : « le premier lancer donne la face numérotée 1 »
— F : « le deuxième lancer donne la face numérotée 1 »

(1). Calculer $\mathbb{P}(E)$ et $\mathbb{P}(F)$.

(2). (a). Sachant que l'on a choisit le dé D_2, quelle est la probabilité de l'événément $E\cap F$?

(b). Calculer $\mathbb{P}(E\cap F)$.

(3). E et F sont-ils indépendants ?

Pistes de réflexion

(1). On décomposera les deux événements E et F sur le système complet d'événement $\{D_1, D_2\}$ où l'on définit l'événement D_i comme étant l'événement « on joue avec le dé n° i »et on utilisera la formule des probabilités totales.

(2). (a). On utilisera la définition d'une probabilité composée, puis la formule des probabilités composées.

(b). On remarquera que $\{D_1, D_2\}$ forme un système complet d'événements et on calculera $\mathbb{P}_{D_1}(E\cap F)$ pour pouvoir l'utiliser.

(3). On vérifiera que $\mathbb{P}(E)\times\mathbb{P}(F)\neq\mathbb{P}(E\cap F)$

Éléments de correction

Dans toute les éléments qui vont suivre, on définit les deux événements D_1 et D_2 par :
D_1 : « on joue avec le dé n° 1 »
D_2 : « on joue avec le dé n° 2 »
et ainsi $\{D_1, D_2\}$ forme un système complet d'événements.

(1). Puisque $\{D_1, D_2\}$ forme un système complet d'événements, on a : $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E\cap D_1)+\mathbb{P}(E\cap D_2)$.
De plus, puisque $\mathbb{P}(D_1)\neq 0$ et $\mathbb{P}(D_2\neq 0)$, d'après le formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E) &= \underbrace{\mathbb{P}(D_1)}_{=\frac12}\underbrace{\mathbb{P}_{D_1}(E)}_{=\frac16}+\underbrace{\mathbb{P}(D_2)}_{=\frac12}\underbrace{\mathbb{P}_{D_2}(E)}_{=\frac56}\\ &= \frac12\times\frac16+\frac12\times\frac56\\ &= \frac12\end{aligned}$$

De même on aura :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F) &= \underbrace{\mathbb{P}(D_1)}_{=\frac12}\underbrace{\mathbb{P}_{D_1}(F)}_{=\frac16}+\underbrace{\mathbb{P}(D_2)}_{=\frac12}\underbrace{\mathbb{P}_{D_2}(F)}_{=\frac56}\\ &= \frac12\times\frac16+\frac12\times\frac56\\ &= \frac12\end{aligned}$$

(2). (a). On cherche donc à déterminer $\mathbb{P}_{D_2}(E\cap F)$.

Par définition de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{D_2}(E\cap F)$ on a : $\mathbb{P}_{D_2}(E\cap F) = \dfrac{\mathbb{P}(D_2\cap E\cap F)}{\mathbb{P}(D_2)}$.
Or puisque $\mathbb{P}(D_2\cap E)\neq 0$, d'après la formule des probabilités composées, il vient que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_2\cap E\cap F) &= \mathbb{P}(D_2)\mathbb{P}_{D_2}(E), \mathbb{P}_{D_2\cap E}(F)\\ &= \frac12\times\frac56\times\mathbb{P}_{D_2\cap E}(F)\end{aligned}$$

Or $\mathbb{P}_{D_2\cap E}(F)=\mathbb{P}_{D_2}(F)$ donc on en déduit que : $\mathbb{P}(D_2\cap E\cap F)=\frac12\times\frac56\times\frac56$.

Finalement, il vient que $\mathbb{P}_{D_2}(E\cap F)=\dfrac{25}{36}$

(b). Puisque $\{D_1, D_2\}$ est un système complet d'événements, on a : $\mathbb{P}(E\cap F) = \mathbb{P}(D_1\cap E\cap F)+\mathbb{P}(D_2\cap E\cap F)$.
Puisque $\mathbb{P}(D_2)\neq 0$ et $\mathbb{P}(D_1)\neq 0$, d'après la formule des probabilités totales, on en déduit que :

$$\mathbb{P}(E\cap F)=\mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}_{D_1}(E\cap F)+\mathbb{P}(D_2)\mathbb{P}_{D_2}(E\cap F).$$

Par définition de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{D_1}(E\cap F)$ on a : $\mathbb{P}_{D_1}(E\cap F) = \dfrac{\mathbb{P}(D_1\cap E\cap F)}{\mathbb{P}(D_1)}$.
Or puisque $\mathbb{P}(D_1\cap E)\neq 0$, d'après la formule des probabilités composées, il vient que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_1\cap E\cap F) &= \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}_{D_1}(E), \mathbb{P}_{D_1\cap E}(F)\\ &= \frac12\times\frac16\times\mathbb{P}_{D_1\cap E}(F)\end{aligned}$$

Or $\mathbb{P}_{D_1\cap E}(F)=\mathbb{P}_{D_1}(F)$ donc on en déduit que : $\mathbb{P}(D_1\cap E\cap F)=\frac12\times\frac16\times\frac16$.

Ainsi, il vient que $\mathbb{P}_{D_1}(E\cap F)=\dfrac{1}{36}$

Par suite, on a donc que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E\cap F) &= \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}_{D_1}(E\cap F)+\mathbb{P}(D_2)\mathbb{P}_{D_2}(E\cap F)\\ &= \frac12\times\frac1{36}+\frac12\times\frac{25}{36}\\ &= \frac12\times\frac{26}{36}\\ &= \frac{13}{36}\end{aligned}$$

(3). Par définition, E et F sont indépendants si $\mathbb{P}(E\cap F)=\mathbb{P}(E)\times\mathbb{P}(F)$.
On a montré que $\mathbb{P}(E\cap F)=\dfrac{13}{36}$ qui est clairement différent de $\mathbb{P}(E)\times\mathbb{P}(F)=\dfrac14$.
Par conséquent, les deux événements E et F ne sont pas indépendants.