Exercice| [1248] | 1| Couples de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernouilli de paramètres respectifs p et r telles que $\mathrm{Cov}\,(X,\,Y) = 0$. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Pistes de réflexion

- On essaiera de remplir le tableau de loi conjointe du couple (X, Y) quitte à utiliser un paramètre supplémentaire.
- On traduira ensuite le fait que $\mathrm{Cov}\,(X,\,Y) = 0$ et le lien qui en découle entre les différents paramètres.

Éléments de correction

Posons $a = \mathbb{P}\left([X = 1] \cap [Y = 1]\right)$, alors le tableau de la loi du couple comporte les éléments suivants :

$Y \backslash X$	0	1	
0			
1		a	r
		p	

et que l'on complète en posant : $\begin{array}{rcl} \alpha & = & (1-p)-(r-a) \\ & = & (1-r)-(p-a) \\ & = & 1-r-p+a \end{array}$

$Y \backslash X$	0	1	
0	α	$p-a$	$1-r$
1	$r-a$	a	r
	$1-p$	p	

- On a directement que : $\begin{array}{rcl} \mathbb{E}\,(XY) & = & 1 \times 1 \times \mathbb{P}\left([X = 1] \cap [Y = 1]\right) \\ & = & a \end{array}$ et comme X et Y suivent des lois de Bernoulli, $\mathbb{E}\,(Y) = p$ et $\mathbb{E}\,(X) = r$.
- Par hyppthèse, $\sigma_{XY} = 0$ donc $a = rp$ et ainsi :

$$\mathbb{P}\left([X = 1] \cap [Y = 1]\right) = \mathbb{P}\left([X = 1]\right) \times \mathbb{P}\left([Y = 1]\right)$$

- Pour les autres couples :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}\left([X = 0] \cap [Y = 1]\right) & = & r-a = r-rp \\ & = & (1-p)r \\ & = & \mathbb{P}\left([X = 0]\right)\mathbb{P}\left([Y = 1]\right) \\ \mathbb{P}\left([X = 1] \cap [Y = 0]\right) & = & p-a = p-rp \\ & = & p(1-r) \\ & = & \mathbb{P}\left([X = 1]\right)\mathbb{P}\left([Y = 0]\right) \\ \mathbb{P}\left([X = 0] \cap [Y = 0]\right) & = & \alpha = 1-r-p+rp \\ & = & (1-p)(1-r) \\ & = & \mathbb{P}\left([X = 0]\right)\mathbb{P}\left([Y = 0]\right) \end{array}$$
D'où X et Y sont indépendantes, ce qui n'est pas le cas en général.