Exercice| [1247] | 1| Étude de l'indépendance de deux variables aléatoires

Soit Y une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau ci-contre. On pose $Y = X^2$.

(1). Déterminer la loi du couple (X, Y) puis celle de Y.

(2). Déterminer $\text{Cov}(X, Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

i	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}([X = i])$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

Pistes de réflexion

(1). On commence par identifier le support Ω, puis que certains événement $[X = i] \cap [Y = j]$ sont de probabilité nulles.

(2). On détermine la covariance de X et Y en calculant au préalable $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$, puis le coefficient de correlation linéaire. On s'assurera du caractère indépendant au non de X et Y en vérifiant si $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \mathbb{P}([X = i]) \times \mathbb{P}([Y = j])$ pour tout $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Éléments de correction

(1). Support de Y : Puisque $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, l'image de $X(\Omega)$ par la fonction $x \longmapsto x^2$, il vient que $Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$.

Loi du couple (X, Y) : soit $(i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) &= \mathbb{P}([X = i]) \times \mathbb{P}_{[X=i]}([Y = j]) \\ &= \mathbb{P}([X = i]) \times \mathbb{P}_{[X=i]}\left([X^2 = j]\right) \\ &= \mathbb{P}([X = i]) \times \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq i^2 \\ 1 \text{ si } j = i^2 \end{cases} \end{aligned}$$

On peut alors récapituler ces résultats dans un tableau de loi de couple :

$Y \backslash X$	-2	-1	0	1	2
4	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0
0	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0

Loi de Y : il s'agit de donner la loi marginale de Y du couple (X, Y).

Les événements $[X = -2]$, $[X = -1]$, $[X = 0]$, $[X = 1]$ et $[X = 2]$ formant un système complet d'événements de probabilités non nulles, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = 0]) &= \mathbb{P}([Y = 0] \cap [X = -2]) + \mathbb{P}([Y = 0] \cap [X = -1]) \\ &\quad + \mathbb{P}([Y = 0] \cap [X = 0]) + \mathbb{P}([Y = 0] \cap [X = 1]) \\ &\quad + \mathbb{P}([Y = 0] \cap [X = 2]) \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{6} + 0 + 0 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = 1]) &= \mathbb{P}([Y = 1] \cap [X = -2]) + \mathbb{P}([Y = 1] \cap [X = -1]) \\ &\quad + \mathbb{P}([Y = 1] \cap [X = 0]) \\ &\quad + \mathbb{P}([Y = 1] \cap [X = 1]) + \mathbb{P}([Y = 1] \cap [X = 2]) \\ &= 0 + \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} + 0 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = 4]) &= \mathbb{P}([Y = 4] \cap [X = -2]) + \mathbb{P}([Y = 4] \cap [X = -1]) \\ &\quad + \mathbb{P}([Y = 4] \cap [X = 0]) \\ &\quad + \mathbb{P}([Y = 4] \cap [X = 1]) + \mathbb{P}([Y = 4] \cap [X = 2]) \\ &= \frac{1}{6} + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

et si l'on récapitule ces résultats dans un tableau de loi pour Y :

j	4	1	0
$\mathbb{P}([Y = j])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

(2). Espérance de X : comme X est une variable aléatoire finie, elle admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ qui vaut par définition $\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in X(\Omega)} i \times \mathbb{P}([X = i])$.

On a alors : $$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{i \in X(\Omega)} i \times \mathbb{P}([X = i]) \\ &= -2 \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Espérance de Y : comme Y est une variable aléatoire finie, elle admet une espérance [a] $\mathbb{E}(Y)$ qui vaut par définition $\mathbb{E}(Y) = \sum_{j \in Y(\Omega)} j \times \mathbb{P}([Y = j])$.

On a alors : $$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{j \in Y(\Omega)} j \times \mathbb{P}([Y = j]) \\ &= 4 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{11}{6} \end{aligned}$$

Espérance de la variable aléatoire XY : puisque X et Y sont des variables aléatoires finies, la variable aléatoire XY admet une espérance qui vaut par définition $\mathbb{E}(XY) = \sum_{(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} i \times j \times \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$.

On a donc :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} i\times j\times \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \\
&= (-2)\times 4\times \mathbb{P}([X=-2]\cap[Y=4]) \\
&\quad + \underbrace{(-1)\times 0\times \mathbb{P}([X=-1]\cap[Y=4])}_{=0} \\
&\quad + \underbrace{0\times 4\times \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=4])}_{=0} + \underbrace{1\times 4\times \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=4])}_{=0} \\
&\quad + 2\times 4\times \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=4]) + \underbrace{(-2)\times 1\times \mathbb{P}([X=-2]\cap[Y=1])}_{=0} \\
&\quad + (-1)\times 1\times \mathbb{P}([X=-1]\cap[Y=1]) + \underbrace{0\times 1\times \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=1])}_{=0} \\
&\quad + 1\times 1\times \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) + \underbrace{2\times 1\times \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=1])}_{=0} \\
&\quad + \underbrace{(-2)\times 0\times \mathbb{P}([X=-2]\cap[Y=0])}_{=0} + \underbrace{(-1)\times 0\times \mathbb{P}([X=-1]\cap[Y=0])}_{=0} \\
&\quad + \underbrace{0\times 0\times \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=0])}_{=0} + \underbrace{1\times 0\times \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=0])}_{=0} \\
&\quad + \underbrace{2\times 0\times \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=0])}_{=0} \\
&= (-2)\times 4\times \mathbb{P}([X=-2]\cap[Y=4]) + 2\times 4\times \mathbb{P}([X=2]\cap[Y=4]) \\
&\quad + (-1)\times 1\times \mathbb{P}([X=-1]\cap[Y=1]) + 1\times 1\times \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) \\
&= -8\times\frac{1}{6} + 8\times\frac{1}{6} + 1\times\frac{1}{4} + (-1)\times\frac{1}{4} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Calcul de $\operatorname{Cov}(X, Y)$: on sait que $\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Ainsi, il vient que :
$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= 0 - 0\times\frac{11}{6} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Indépendance de X et Y : on remarque notamment que $\mathbb{P}([X=-2]\cap[Y=1]) = 0$ mais que :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=-2])\times\mathbb{P}([Y=1]) &= \frac{1}{6}\times\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{12} \\
&\neq \mathbb{P}([X=-2]\cap[Y=1])
\end{aligned}
$$

et par suite, les deux variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

a. on remarquera que pour le calcul de $\operatorname{Cov}(X, Y)$ il est inutile de calculer cette dernière