Exercice| [1246] | 1| Couples de Variables aléatoires

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires finies dont la loi est définie par le tableau suivant :

$Y \backslash X$	0	1
0	p	$\frac{1}{2}-p$
1	$\frac{1}{3}-p$	$\frac{1}{6}+p$

(1). À quel intervalle doit appartenir p pour que ces données soient acceptables ?

(2). Déterminer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$ et le coefficient de correlation linéaire entre X et Y.

(3). Déterminer p pour que X et Y soient indépendantes.

Pistes de réflexion

(1). Toutes les probabilités des événements $[X=i]\cap[Y=j]$ où $(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$ doivent être positives et leur somme égale à 1.

(2). Il s'agit dans un premier temps de déterminer les lois marginales de X et Y, pour ensuite en calculer leur espérance et leur variance.

(3). On doit avoir $\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) = \mathbb{P}([X=i])\times\mathbb{P}([Y=j])$ pour tout $(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$.

Éléments de correction

(1). Tout d'abord, on remarque que :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}([X=0]\cap[Y=0])+\mathbb{P}([X=0]\cap[Y=1])+\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=0])\\
&\quad+\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1])\\
&= p+\frac{1}{2}-p+\frac{1}{3}-p+\frac{1}{6}+p\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\\
&= 1
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on doit avoir : $\left\{\begin{array}{l}\mathbb{P}([X=0]\cap[Y=0])\geq 0\\ \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=1])\geq 0\\ \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=0])\geq 0\\ \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1])\geq 0\end{array}\right.$.

Ainsi, il vient déjà que : $\left\{\begin{array}{l}p\geq 0\\ \frac{1}{2}-p\geq 0\\ \frac{1}{3}-p\geq 0\\ \frac{1}{6}+p\geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}p\geq 0\\ \frac{1}{2}\geq p\\ \frac{1}{3}\geq p\\ p\geq -\frac{1}{6}\end{array}\right.$

Par conséquent, tout réel p tel que $0\leq p\leq \frac{1}{3}$ satisfait toutes ces conditions.

Finalement, le tableau donné permet de définir la loi du couple (X,Y) si, et seulement si, $0\leq p\leq\frac{1}{3}$.

(2). Loi de X : il s'agit de donner la loi marginale de X pour le couple (X,Y).

On considère alors le système complet d'événements $\{[Y=0],[Y=1]\}$ pour exprimer $\mathbb{P}([X=0])$ et $\mathbb{P}([X=1])$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X=0]) &= \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=0])+\mathbb{P}([X=0]\cap[Y=1])\\
&= p+\frac{1}{3}-p\\
&= \frac{1}{3}\\
\mathbb{P}([X=1]) &= \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=0])+\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1])\\
&= \frac{1}{2}-p+\frac{1}{6}+p\\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

On peut récapituler ces résultats dans le tableau de loi suivant pour X :

i	0	1
$\mathbb{P}([X=i])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

On remarque alors que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{3}$.

Loi de Y : il s'agit de donner la loi marginale de Y pour le couple (X,Y).

On considère alors le système complet d'événements $\{[X=0],[X=1]\}$ pour exprimer $\mathbb{P}([Y=0])$ et $\mathbb{P}([Y=1])$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=0]) &= \mathbb{P}([Y=0]\cap[X=0])+\mathbb{P}([Y=0]\cap[X=1])\\
&= p+\frac{1}{2}-p\\
&= \frac{1}{2}\\
\mathbb{P}([Y=1]) &= \mathbb{P}([Y=1]\cap[X=0])+\mathbb{P}([Y=1]\cap[X=1])\\
&= \frac{1}{3}-p+\frac{1}{6}+p\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On peut récapituler ces résultats dans le tableau de loi suivant pour Y :

j	0	1
$\mathbb{P}([Y=j])$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

On remarque alors que Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Espérance et variance de X : puisque $X\hookrightarrow\mathcal{B}\left(1,\frac{2}{3}\right)$ donc par suite il vient $\mathbb{E}(X)=\frac{2}{3}$ et $\mathbb{V}(X)=\frac{2}{9}$.

Espérance et variance de Y : puisque $Y\hookrightarrow\mathcal{B}\left(1,\frac{1}{2}\right)$ donc par suite il vient $\mathbb{E}(Y)=\frac{1}{2}$ et $\mathbb{V}(X)=\frac{1}{4}$.

Coefficient de corrélation entre X et Y : par définition du coefficient de corrélation linéaire, on a :

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{Cov}(X,\,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}\times\sqrt{\mathbb{V}(X)}} \quad \text{où } \operatorname{Cov}(X,\,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$$

Puisque X et Y sont des variables aléatoires finies, la variable aléatoire XY admet une espérance qui est :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} i \times j \times \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j])$$

Compte-tenu du tableau de la loi du couple (X,Y), il vient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(XY) & = & 0\times 0\times \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=0]) + 0\times 1\times \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=1]) \\ & & +1\times 0\times \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=0]) + 1\times 1\times \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) \\ & = & \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) \\ & = & \frac{1}{6}+p \end{array}$$

On en déduit donc que : $$\begin{array}{rcl} \mathrm{Cov}(X,Y) & = & \mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ & = & \frac{1}{6}+p-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} \\ & = & \frac{1}{6}+p-\frac{1}{3} \\ & = & p-\frac{1}{6} \end{array}$$

Par suite : $$\begin{array}{rcl} \rho_{XY} & = & \dfrac{p-\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{2}{9}}\times\sqrt{\frac{1}{4}}} \\ & = & \dfrac{p-\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{2}} \\ & = & 3\sqrt{2}\left(p-\frac{1}{6}\right) \end{array}$$

(3). Condition nécessaire sur p : On sait que : si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$.

Ainsi, puisque $\mathrm{Cov}(X,Y)=p-\frac{1}{6}$, il est nécessaire que $p=\frac{1}{6}$.

Condition suffisante sur p : on suppose donc que $p=\frac{1}{6}$.

La loi du couple (X,Y) devient :

Y \ X	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

où l'on a alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=0]) & = & \frac{1}{6} \\ & = & \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} \\ & = & \mathbb{P}([X=0])\times\mathbb{P}([Y=0]) \\ \mathbb{P}([X=0]\cap[Y=1]) & = & \frac{1}{6} \\ & = & \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} \\ & = & \mathbb{P}([X=0])\times\mathbb{P}([Y=1]) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=0]) & = & \frac{1}{3} \\ & = & \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} \\ & = & \mathbb{P}([X=1])\times\mathbb{P}([Y=0]) \\ \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) & = & \frac{1}{3} \\ & = & \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} \\ & = & \mathbb{P}([X=1])\times\mathbb{P}([Y=1]) \end{array}$$

et ainsi, on a bien : $\forall (i,j)\in X(\Omega)\times Y(\Omega),\ \mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) = \mathbb{P}([X=i])\times\mathbb{P}([Y=j])$

ce qui permet d'assurer que X et Y sont bien deux variables aléatoires indépendantes.