Exercice| [1244] | 1| Étude d'une répétition d'une expérience aléatoire à l'aide d'une variable aléatoire

Lors d'une compétition sportive, un athlète a la probabilité $\frac{1}{n}$ de réussir son n^{e} saut. Il est éliminé dès qu'il échoue à un saut.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de sauts effectués.

(1). Quelle est la loi de X ? Vérifier que l'expression trouvée définit bien une loi de probabilité.

(2). Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Pistes de réflexion

(1). On pourra faire intervenir la formule des probabilités composées pour décomposer l'événement $[X=k]$.

(2). On mettra en forme la série numérique dont on doit étudier la convergence absolue pour s'assurer de l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$, et on pourra ensuite en calculer leurs valeurs en utilisant les développements en série entière usuels, et ne pas oublier d'utiliser la formule de Huygens pour calculer la variance de X.

Éléments de correction

(1). Le premier saut étant nécessairement réalisé et surtout réussi, il vient que $X(\Omega) = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n \geq 2\}$.
En notant R_i l'événement « l'athlète a réussi au i^{e}saut », on a : $[X=k] = R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_{k-1} \cap \overline{R_k}$ et en utilisant la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(R_1)\times\mathbb{P}_{R_1}(R_2)\times\mathbb{P}_{R_1\cap R2}(R_3)\times\ldots\times\mathbb{P}_{R_1\cap\ldots R_{k-2}}(R_{k-1})\times\mathbb{P}_{R_1\cap\ldots\cap R_{k-1}}\left(\overline{R_k}\right)$$

Or on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_1) &= \frac{1}{1}\\ \mathbb{P}_{R_1}(R_2) &= \frac{1}{2}\\ \mathbb{P}_{R_1\cap R_2}(R_3) &= \frac{1}{3}\\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots\\ pcR_1\cap\ldots R_{k-2}, R_{k-1} &= \frac{1}{k-1}\\ \mathbb{P}_{R_1\cap\ldots\cap R_{k-1}}\left(\overline{R_k}\right) &= -1\frac{1}{k}\end{aligned}$$

On en déduit donc que : $\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=k]) &= \frac{1}{(k-1)!}\times\left(1-\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{1}{(k-1)!}\times\frac{k-1}{k}\\ &= \frac{k-1}{k!} \quad (\star)\end{aligned}$$

Pour que la relation permette de définir une loi de probabilité pour X, montrons que la série numérique $\sum_{k\geq 2}\frac{k-1}{k!}$ converge et a pour somme 1.

Soit alors $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k!} &= \sum_{k=2}^{n}\frac{k}{k!} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\\ &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\\ &= \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k!} - \sum_{k+2}^{n-1}\frac{1}{k!} - \frac{1}{n!}\\ &= 1 - \frac{1}{n!}\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1\end{aligned}$$

Par suite, puisque la suite des sommes partielles de la série numérique $\sum_{k\geq 2}\frac{k-1}{k!}$ a une limite finie égale à 1, on en déduit que la série numérique $\sum_{k\geq 2}\frac{k-1}{k!}$ est convergente et a pour somme 1.

(2). On sait que : Si la variable aléatoire X^2 admet une espérance, alors la variable aléatoire X admet une espérance, et une variance.
D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire X^2 admet une espérance si la série numérique $\sum_{k\in X(\Omega)} k^2\times\mathbb{P}([X=k])$ converge absolument et lorsque c'est le cas, $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ en sera la somme.

Étude de la convergence absolue de la série numérique $\sum_{k\in X(\Omega)} k^2\times\mathbb{P}([X=k])$

puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, il s'agit d'étudier la convergence absolue de la série numérique $\sum_{k\geq 2} k^2\mathbb{P}([X=k])$ c'est à dire celle de la série numérique $\sum_{k\geq 2}\frac{k^2(k-1)}{k!}$.

Il est immédiat que : $\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $\frac{k^2(k-1)}{k!} > 0$

et que l'on a : $\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$,
$$\begin{aligned}\frac{\frac{(k+1)^2((k+1)-1)}{(k+1)!}}{\frac{k^2(k-1)}{k!}} &= \frac{(k+1)^2}{k(k-1)}\times\frac{1}{k+1}\\ &\underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k^2}{k^2}\times\frac{1}{k+1}\\ &\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0<1\end{aligned}$$

Donc d'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques à termes strictement positifs, la série numérique $\sum_{k\geq 2}\frac{k-1}{k!}$ est convergente, et comme elle est à termes positifs, elle est absolument convergente.
Ainsi, la variable aléatoire X^2 admet une espérance, et par suite, X admet une espérance et une variance.

Calcul de $\mathbb{E}(X)$: il s'agit donc de calculer la somme de la série numérique $\sum_{k\geq 2} k\times\frac{k-1}{k!}$ dont on est assuré de la convergence d'après ce qui précède.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{+\infty} k \times \frac{k-1}{k!} &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\ &= \mathrm{e}\end{aligned}$$

Ainsi, il vient que $\mathbb{E}(X) = \mathrm{e}$.

Calcul de $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ **:** il s'agit donc de calculer la somme de la série numérique $\sum_{k \geq 2} k^2 \times \frac{k-1}{k!}$ dont on s'est déjà assuré au préalable de la convergence.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{+\infty} k^2 \times \frac{k-1}{k!} &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k}{(k-2)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+2}{k!} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!}}_{\sum \frac{x^k}{k!} \text{ et } \sum \frac{k}{k!} x^k \text{ sont de rayon de convergence } +\infty \text{ donc absolument convergentes pour tout } x \in \mathbb{R}} +2 \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}}_{\text{Série convergente de somme } \mathrm{e}} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k!} + 2\mathrm{e} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} + 2\mathrm{e} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + 2\mathrm{e} \\ &= \mathrm{e} + 2\mathrm{e} \\ &= 3\mathrm{e}\end{aligned}$$

et ainsi on a $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 3\mathrm{e}$

Calcul de $\mathbb{V}(X)$ **:** d'après la formule de Huygens, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= 3\mathrm{e} - \mathrm{e}^2 \\ &= \mathrm{e}\,(3 - \mathrm{e})\end{aligned}$$