Exercice | [1214] | 1 | Matrice d'un projecteur et d'une symétrie vectorielle

On se place dans $\mathbb{R}^3$ dont on note $\mathcal{B}$ la base canonique.
Soient $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (1, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

On donne par ailleurs que : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et que : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1). Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2). On désigne par $F = \text{Vect}\,(u_1)$ et $G = \text{Vect}\,(u_2, u_3)$.
On note p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F de direction G.

- **(a).** Donner les matrices $\text{Mat}_{\mathcal{F}}(p)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{F}}(s)$.
- **(b).** Déterminer alors les matrices $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$.

Pistes de réflexion

(1). On pourra construire la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et conclure à l'aide du théorème de caractérisation des bases par leur représentation matricielle.

(2). (a). On revient à la définition d'une projection et d'une symétrie à partir de $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, où l'on connait la matrice d'une projection ou d'une symétrie dans une base formée par une base de F et d'une base de G.

(b). Les formules de changement de base seront utilisées ici pour revenir à la base canonique ;

Éléments de correction

(1). D'après le théorème de caractérisation des bases par leur représentation matricielle, on a :

$$\left(\begin{array}{c} \mathcal{F}\text{, famille de 3 vecteurs de } \mathbb{R}^3, \\ \text{est une base de } \mathbb{R}^3 \text{ espace de} \\ \text{dimension 3} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \text{ est inversible} \right)$$

et où l'on a de plus : $(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \in \text{GL}_3(\mathbb{R})) \Leftrightarrow (\text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})) = 3)$

Par définition : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et un échelonnement en lignes donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice étant triangulaire supérieure avec tous les termes diagonaux non nuls, elle est donc de rang 3, et par suite, $\text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})) = 3$ ce qui assure du caractère inversible de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ et du caractère base de $\mathcal{F}$.

(2). (a). Puisque la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on a : $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}\right) \oplus \text{Vect}\left(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right)$, c'est à dire que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

Ainsi, par théorème, on aura : $\text{Mat}_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b). En notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{F}$, il vient que $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ et d'après les formules de changement de bases pour les endomorphismes que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{F}}(p) = P^{-1} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) \times P \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{F}}(s) = P^{-1} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) \times P$$

On en déduit donc que : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = P \times \text{Mat}_{\mathcal{F}}(p) \times P^{-1}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = P \times \text{Mat}_{\mathcal{F}}(s) \times P^{-1}$

On obtient l'inverse de P par échelonnement en lignes de la matrice augmentée $(P \mid \text{I}_3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 1L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow -1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice P est ainsi : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

On en déduit alors que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

et que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ -6 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$