Exercice| [1204] | 1| Sous-espace engendré

Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que $x = (2, 3, -1)$ et $y = (1, -1, -2)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que $u = (3, 7, 0)$ et $v = (5, 0, -7)$.

Pistes de réflexion

— Il suffira de montrer que x et y peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de u et v...
— ...et que u et v peuvent s'écrive comme combinaison linéaire de x et y.

Éléments de correction

Montrons que $\text{Vect}\,(x, y) \subset \text{Vect}\,(u, v)$ **:** Pour cela, il suffit de montrer que $x \in \text{Vect}\,(u, v)$ et que $y \in \text{Vect}\,(u, v)$, puisque dans ce cas, toute combinaison linéaire de x et y sera nécessairement une combinaison linéaire de u et v, donc un élément de $\text{Vect}\,(u, v)$.

Montrons que $x \in \text{Vect}\,(u, v)$ **:** par définition, on a :

$$\begin{aligned}(x \in \text{Vect}\,(u, v)) \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ x = \alpha u + \beta v) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c}\text{Le système de} \\ \text{représentation matricielle} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & -1 \end{array}\right) \\ \text{est compatible}\end{array}\right)\end{aligned}$$

Un échelonnement en lignes de ce système donne :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & -1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \text{puis } L_2 \leftrightarrow L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 7L_3 - 3L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 35 & 5 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Par suite, la dernière ligne de ce système donnant une équation de compatibilité de la forme « $0 = 0$ », ce système est compatible, ce qui assure donc que $x \in \text{Vect}\,(u, v)$.

Montrons que $y \in \text{Vect}\,(u, v)$ **:** par définition, on a :

$$\begin{aligned}(y \in \text{Vect}\,(u, v)) \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ y = \alpha u + \beta v) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c}\text{Le système de} \\ \text{représentation matricielle} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & -2 \end{array}\right) \\ \text{est compatible}\end{array}\right)\end{aligned}$$

Un échelonnement en lignes de ce système donne :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \text{puis } L_2 \leftrightarrow L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 7L_3 - 3L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & 35 & 10 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 7 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Par suite, la dernière ligne de ce système donnant une équation de compatibilité de la forme « $0 = 0$ », ce système est compatible, ce qui assure donc que $y \in \text{Vect}\,(u, v)$.

Par conséquent, on a bien $\text{Vect}\,(x, y) \subset \text{Vect}\,(u, v)$.

Montrons que $\text{Vect}\,(u, v) \subset \text{Vect}\,(x, y)$ **:** Pour cela, il suffit de montrer que $u \in \text{Vect}\,(x, y)$ et que $v \in \text{Vect}\,(x, y)$, puisque dans ce cas, toute combinaison linéaire de u et v sera nécessairement une combinaison linéaire de x et y, donc un élément de $\text{Vect}\,(x, y)$.

Montrons que $u \in \text{Vect}\,(x, y)$ **:** par définition, on a :

$$\begin{aligned}(u \in \text{Vect}\,(x, y)) \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ u = \alpha x + \beta y) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c}\text{Le système de} \\ \text{représentation matricielle} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \\ -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \\ \text{est compatible}\end{array}\right)\end{aligned}$$

Un échelonnement en lignes de ce système donne :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \\ -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \text{puis } L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \text{puis } L_1 \leftarrow -L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -7 & 7 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow 3L_3 - 7L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Par suite, la dernière ligne de ce système donnant une équation de compatibilité de la forme « $0 = 0$ », ce système est compatible, ce qui assure donc que $u \in \text{Vect}\,(x, y)$.

Montrons que $u \in \text{Vect}\,(x, y)$ **:** par définition, on a :

$$\begin{aligned}(v \in \text{Vect}\,(x, y)) \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ v = \alpha x + \beta y) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c}\text{Le système de} \\ \text{représentation matricielle} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -7 \end{array}\right) \\ \text{est compatible}\end{array}\right)\end{aligned}$$

Un échelonnement en lignes de ce système donne :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -7 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \text{puis } L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \text{puis } L_1 \leftarrow -L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & -7 & -21 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow 3L_3 - 7L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Par suite, la dernière ligne de ce système donnant une équation de compatibilité de la forme « $0 = 0$ », ce système est compatible, ce qui assure donc que $v \in \mathrm{Vect}\,(x, y)$.

Par conséquent, on a bien $\mathrm{Vect}\,(x, y) \subset \mathrm{Vect}\,(u, v)$.

En conclusion, on a $\mathrm{Vect}\,(x, y) \subset \mathrm{Vect}\,(u, v)$ et $\mathrm{Vect}\,(u, v) \subset \mathrm{Vect}\,(x, y)$ donc $\mathrm{Vect}\,(u, v) = \mathrm{Vect}\,(x, y)$.