Exercice| [1193] | 1| Sous-espaces vectoriels

Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ x - z = \alpha \text{ et } y - t = \beta\}$ où α et β sont deux réels.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que F soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Pistes de réflexion

Il s'agit de vérifier point par point les propriétés caractéristiques des sous-espaces vectoriels, à savoir :

- F doit être bien évidemment un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$
- le vecteur nul $\overrightarrow{0} = (0,0,0,0)$ doit appartenir à F
- F doit être stable par combinaison linéaire.

Éléments de correction

F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$: c'est le cas par construction quelles que soient les valeurs de α et β.

Le vecteur $\overrightarrow{0} = (0,0,0,0)$ doit appartenir à F : pour que cela soit le cas, on doit avoir que $0 - 0 = \alpha$ et $0 - 0 = \beta$, ce qui amène à la condition $(\alpha, \beta) = (0,0)$.

Stabilité de F par combinaison linéaire : sous l'hypothèse $(\alpha, \beta) = (0,0)$, on considère $u = (x,y,z,t) \in F$, $v = (x',y',z',t') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Posons $w = \lambda u + v$ en notant $w = (x'', y'', z'', t'')$.
Montrons que $w \in F$, c'est à dire que $x'' - z'' = 0$ et $y'' - t'' = 0$.

Par définition de w, on a les relations : $\begin{cases} x'' = \lambda x + x' \\ y'' = \lambda y + y' \\ z'' = \lambda z + z' \\ t'' = \lambda t + t' \end{cases}$

On a alors : $\begin{aligned} x'' - z'' &= \lambda x + x' - (\lambda z + z') \\ &= \lambda \underbrace{(x - z)}_{=0 \text{ car } u \in F} + \underbrace{x' - z'}_{=0 \text{ car } v \in F} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$

et aussi : $\begin{aligned} y'' - t'' &= \lambda y + y' - (\lambda t + t') \\ &= \lambda \underbrace{(y - t)}_{=0 \text{ car } u \in F} + \underbrace{y' - t'}_{=0 \text{ car } v \in F} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$

et par conséquent $w \in F$, et F est alors bien stable par combinaison linéaire.

Compte-tenu de la condition d'appartenance du vecteur nul à F, il vient que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ si, et seulement si, $(\alpha, \beta) = (0,0)$.