Exercice| [1166] | 1| Déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète

Soit $q \in]0;1[$, on considère une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X = n]) = q \times \mathbb{P}([X \geq n])$$

(1). Déterminer la loi de X.

(2). Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Pistes de réflexion

(1). On pourra remarquer que $\mathbb{P}([X \geq n]) - \mathbb{P}([X \geq n+1]) = \mathbb{P}([X = n])$.

(2). On pourra remarquer que X suit une loi géométrique.

Éléments de correction

(1). **Support de X :** par hypothèse on a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Loi de X : soit $k \in \mathbb{N}^* = X(\Omega)$.

On a : $\quad [X = k] = [X \geq k] \setminus [X \geq k+1]$

Ainsi, il vient : $\quad \mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X \geq k]) - \mathbb{P}([X \geq k+1])$

Par suite, on en déduit que : $\quad q \times \mathbb{P}([X \geq k]) = \mathbb{P}([X \geq k]) - \mathbb{P}([X \geq k+1])$.

Ainsi, il vient : $\quad \mathbb{P}([X \geq k+1]) = (1-q)\,\mathbb{P}([X \geq k])$.

Par conséquent, la suite $(\mathbb{P}([X \geq k]))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $1-q$.

On en déduit donc que : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X \geq k]) = (1-q)^{k-1} \times \underbrace{\mathbb{P}([X \geq 1])}_{=1}$

Finalement : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}([X = k]) = (1-q)^{k-1}\, q$.

(2). On reconnaît alors que X suit une loi géométrique de paramètre q. Par conséquent, X admet une espérance et une variance qui valent respectivement $\mathbb{E}(X) = q$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-q}{q^2}$.