Exercice| [1165] | 1| Espérance et variance

Soit X une variable aléatoire telle $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et dont la loi de probabiltié vérifie :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = a\frac{k^2+1}{k!}$$

où a est un réel fixé.

(1). Calculer a.

(2). Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Pistes de réflexion

(1). Il s'agit de déterminer la valeur du réel a pour que la série numérique $\sum \mathbb{P}([X = k])$ soit à termes positifs, convergente et de somme 1.

(2). Il va donc falloir montrer que les deux séries numériques $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}([X = x])$ et $\sum\limits_{x \in (\Omega)} x^2 \times \mathbb{P}([X = x])$ sont absolument convergentes et en calculer leur somme, pour ensuite utiliser la formule de Huygens pour obtenir la variance de X.

Éléments de correction

(1). D'après le théorème de caractérisation d'une loi de probabilité pour une variable aléatoire discrète X, le réel a doit être tel que :

Pour tout $n \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X = n]) \geq 0$: puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{k^2+1}{k!}$, il est immédiat que l'on doit avoir $a \geq 0$.

La série numérique $\sum \mathbb{P}([X = n])$ doit être convergente et de somme égale à 1 : tout d'abord, on remarquera que si $a = 0$, cette série est bien convergente, mais est de somme nulle. Donc pour la suite on supposera que $a > 0$.

Il est alors immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a\frac{k^2+1}{k!} > 0$

et que l'on a :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{a\dfrac{(k+1)^2+1}{(k+1)!}}{a\dfrac{k^2+1}{k!}} = \frac{(k+1)^2+1}{k^2+1} \times \frac{1}{k+1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k^2}{k^2} \times \frac{1}{k+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

Ainsi, d'après le critère de d'Alembert, la série numérique $\sum a\frac{k^2+1}{k!}$ est convergente, et ce quelque soit la valeur de a.

De plus, on a :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} a\frac{k^2+1}{k!} &= a\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2+1}{k!} \\
&= a\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)+k+1}{k!} \\
&= a\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{k(k-1)}{k!} + \frac{k}{k!} + \frac{1}{k!}\right)
\end{aligned}$$

Or d'après le théorème de dérivation termes à termes pour les séries entières, les séries entières $\sum \frac{x^n}{n!}$, $\sum \frac{n}{n!}x^{n-1}$ et $\sum \frac{n(n-1)}{n!}x^{n-2}$ sont même rayon de convergence égal à $+\infty$, ce qui signifie que les trois séries numériques $\sum \frac{x^n}{n!}$, $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n}{n!}x^{n-1}$ et $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{n(n-1)}{n!}x^{n-2}$ sont absolument convergentes, donc convergentes quelque que soit la valeur de x, et donc c'est le cas pour $x = 1$.

Ainsi, il vient que :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} a\frac{k^2+1}{k!} &= a\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right) \\
&= a\left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{k!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right) \\
&= a\left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right) \\
&= a\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right) \\
&= a(\mathrm{e} + \mathrm{e} + \mathrm{e}) \\
&= 3a\mathrm{e}
\end{aligned}$$

Ainsi, cette série aua pour somme 1 si, et seulement si, $a = \frac{1}{3\mathrm{e}}$.

Par suite, on définiera bien pour X une loi de probabilité si, et seulement si, $a = \frac{1}{3\mathrm{e}}$.

(2). Puisque X est une variable aléatoire discrtère, par théorème, on sait que si la variable aléatoire X^2 admet une espérance, alors la variable aléatoire X admet une espérance.
Or, d'après le théorème de transfert, la variable aléatoire X^2 admet une espérance si la série numérique $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} x^2 \times \mathbb{P}([X = x])$ est absolument convergente, et lorsque c'est le cas $\mathbb{E}(X^2)$ vaut par définition la somme de cette série.

Étude de la convergence absolue de la série $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} x^2 \times \mathbb{P}([X = x])$: il s'agit donc d'étudier la convergence absolue de la série numérique $\frac{1}{3\mathrm{e}}\sum k^2 \times \frac{k^2+1}{k!}$ qui est clairement une série numérique à termes positifs.

Il est immédiat que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad k^2 \times \frac{k^2+1}{k!} > 0$

et que l'on a :
$$\frac{(k+1)^2 \times \dfrac{(k+1)^2+1}{(k+1)!}}{k^2 \times \dfrac{k^2+1}{k!}} = \frac{(k+1)^2\left((k+1)^2+1\right)}{k^2(k^2+1)} \times \frac{1}{k+1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k^2 \times k^2}{k^2 \times k^2} \times \frac{1}{k+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

Ainsi, d'après le critère de d'Alembert pour les séries à termes strictement positifs, on en déduit que la série numérique $\frac{1}{3\mathrm{e}}\sum k^2 \times \frac{k^2+1}{k!}$ est convergente, et comme elle est à termes positifs, elle est absolument convergente.

Par conséquent, on en déduit que la variable aléatoire X^2 admet une espérance, et par suite que la variable aléatoire X aussi.

Calcul de $\mathbb{E}(X)$: il s'agit donc de déterminer la somme de la série numérique convergente $\sum k \times \frac{k^2+1}{k!}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} k \times \frac{k^2+1}{k!} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^3+k}{k!}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)(k-2)+3k(k-1)+2k}{k!}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{k(k-1)(k-2)}{k!} + 3\frac{k(k-1)}{k!} + 2\frac{k}{k!}\right)
\end{aligned}$$

Or d'après le théorème de dérivation termes à termes pour les séries entières, les séries entières $\sum \frac{x^n}{n!}$, $\sum \frac{n}{n!}x^{n-1}$, $\sum \frac{n(n-1)}{n!}x^{n-2}$ et $\sum \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}x^{n-3}$ sont même rayon de convergence égal à $+\infty$, ce qui signifie que les quatre séries numériques $\sum \frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n!}x^{n-1}$, $\sum_{n\geq 2} \frac{n(n-1)}{n!}x^{n-2}$ et $\sum_{n\geq 3} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}x^{n-3}$ sont absolument convergentes, donc convergentes quelque que soit la valeur de x, et donc c'est le cas pour $x=1$.

Ainsi, il vient que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} k \times \frac{k^2+1}{k!} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)(k-2)}{k!} + 3\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{k!} + 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!}\\
&= \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{k(k-1)(k-2)}{k!} + 3\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{k!} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k!}\\
&= \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{(k-3)!} + 3\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + 3\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\\
&= \mathrm{e} + 3\mathrm{e} + 2\mathrm{e}\\
&= 6\mathrm{e}
\end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que $\mathbb{E}(X) = 2$.

Calcul de $\mathbb{E}(X^2)$: il s'agit donc de déterminer la somme de la série numérique convergente $\sum k^2 \times \frac{k^2+1}{k!}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \times \frac{k^2+1}{k!} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^4+k^2}{k!}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)+6k(k-1)(k-2)+8k(k-1)+2k}{k!}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{k!} + 6\frac{k(k-1)(k-2)}{k!} + 8\frac{k(k-1)}{k!} + 2\frac{k}{k!}\right)
\end{aligned}$$

Or d'après le théorème de dérivation termes à termes pour les séries entières, les séries entières $\sum \frac{x^n}{n!}$, $\sum \frac{n}{n!}x^{n-1}$, $\sum \frac{n(n-1)}{n!}x^{n-2}$, $\sum \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}x^{n-3}$ et $\sum \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n!}x^{n-4}$ sont même rayon de convergence égal à $+\infty$, ce qui signifie que les cinq séries numériques $\sum \frac{x^n}{n!}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n!}x^{n-1}$, $\sum_{n\geq 2} \frac{n(n-1)}{n!}x^{n-2}$, $\sum_{n\geq 3} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}x^{n-3}$ et $\sum_{n\geq 4} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n!}x^{n-4}$ sont absolument convergentes, donc convergentes quelque que soit la valeur de x, et donc c'est le cas pour $x=1$.

Ainsi, il vient que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \times \frac{k^2+1}{k!} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{k!} + 6\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)(k-2)}{k!}\\
&\quad +8\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{k!} + 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!}\\
&= \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{k!} + 6\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{k(k-1)(k-2)}{k!}\\
&\quad +8\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{k!} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k!}\\
&= \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1}{(k-4)!} + 6\sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{(k-3)!} + 8\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!}\\
&\quad +2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + 6\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + 8\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\\
&= \mathrm{e} + 6\mathrm{e} + 8\mathrm{e} + 2\mathrm{e}\\
&= 17\mathrm{e}
\end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que $\mathbb{E}(X)^2 = \frac{17}{3}$.

Calcul de $\mathbb{V}(X)$: d'après la formule de Huygens on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (E(X))^2\\
&= \frac{17}{3} - 2^2\\
&= \frac{17}{3} - 4\\
&= \frac{5}{3}
\end{aligned}$$