Exercice| [1069] | 1| Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$

On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ x_1 + x_3 = 0 \text{ et } x_2 + x_4 = 0\right\}$$

(1). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(2). Déterminer une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.

Pistes de réflexion

(1). On montrera que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ en mobilisant la caractérisation des sous-espaces vectoriels par stabilité par combinaison linéaire.

(2). Il s'agira d'exploiter la caractérisation des élémens de F en la traduisant sous forme d'un système de conditions qui permettra de voir les $4-$uplets d'éléments de F comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ qui devront appartenir à F.

Éléments de correction

(1). **F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$:** c'est le cas par définition de F.

$\overrightarrow{0} = (0, 0, 0, 0)$ **appartient à F :** en effet, il est immédiat que $0 + 0 = 0$ et $0 + 0 = 0$, ce qui assure que $\overrightarrow{0} \in F$.

Stabilité de F par combinaison linéaire : soient $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in F$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Posons $z = \lambda x + y$ en notant $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.

Montrons que $z \in F$, c'est à dire que $z_1 + z_3 = 0$ et $z_2 + z_4 = 0$.

Par définition de z, on a les relations : $\begin{cases} z_1 = \lambda x_1 + y_1 \\ z_2 = \lambda x_2 + y_2 \\ z_3 = \lambda x_3 + y_3 \\ z_4 = \lambda x_4 + y_4 \end{cases}$

On a alors :
$$\begin{aligned} z_1 + z_3 &= \lambda x_1 + y_1 + \lambda x_3 + y_3 \\ &= \lambda \underbrace{(x_1 + x_3)}_{=0 \text{ car } x \in F} + \underbrace{y_1 + y_3}_{=0 \text{ car } y \in F} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

et aussi :
$$\begin{aligned} z_2 + z_4 &= \lambda x_2 + y_2 + \lambda x_4 + y_4 \\ &= \lambda \underbrace{(x_2 + x_4)}_{=0 \text{ car } x \in F} + \underbrace{y_2 + y_4}_{=0 \text{ car } y \in F} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

et par conséquent $z \in F$.

(2). Par définition de F, on a :

$$\begin{aligned} ((x_1, x_2, x_3, x_4) \in F) &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 + 0x_4 \\ x_2 = 0x_3 - x_4 \\ x_3 = x_3 + 0x_4 \\ x_4 = 0x_3 + x_4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow ((x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3(-1, 0, 1, 0) + x_4(0, -1, 0, 1)) \\ &\Leftrightarrow ((x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathrm{Vect}((-1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 1))) \end{aligned}$$

et ainsi $F = \mathrm{Vect}((-1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 1))$ ce qui nous donne une famille génératrice.