Recherche d'inverse par la définition

Exercice| [5109] | 1| Exploiter une relation matricielle

(1). La matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que $2A^2 = \mathrm{I}_3$. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, pourquoi ? Donner alors son inverse.

(2). La matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que $B^3 = 2\mathrm{I}_3$. La matrice B est-elle inversible ? Si oui, pourquoi ? Donner alors son inverse.

(3). La matrice $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que $C + C^2 + C^3 = \mathrm{I}_3$. La matrice C est-elle inversible ? Si oui, pourquoi ? Donner alors son inverse.

(4). Les matrices P et Q de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont telles que : $\left\{\begin{array}{rcl} PQ & = & QP \\ P^2 - Q^2 & = & \mathrm{I}_3 \end{array}\right.$. La matrice $P+Q$ est-elle inversible ? Si oui, pourquoi ? Donner alors son inverse.

Pistes de réflexion

(1). On essaiera de revenir à la définition de ce qu'est une matrice inversible en transformant la relation vérifié par A sous la forme $A \times M = \mathrm{I}_3$ où $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour conclure.

(2). On essaiera de revenir à la définition de ce qu'est une matrice inversible en transformant la relation vérifié par B sous la forme $B \times M = \mathrm{I}_3$ où $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour conclure.

(3). On essaiera de revenir à la définition de ce qu'est une matrice inversible en transformant la relation vérifié par C sous la forme $C \times M = \mathrm{I}_3$ où $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour conclure.

(4). On essaiera de revenir à la définition de ce qu'est une matrice inversible en transformant la relation vérifié par P et Q sous la forme $(P+Q) \times M = \mathrm{I}_3$ où $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour conclure.

Exercice| [5108] | 2| Inverse d'une matrice

Effectuer les produits matriciels ci-dessous pour en déduire les inverses des matrices données.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \boxed{} \qquad A^{-1} = \boxed{}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \boxed{} \qquad A^{-1} = \boxed{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{} \qquad A^{-1} = \boxed{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{} \qquad A^{-1} = \boxed{}$$

Pistes de réflexion

- En notant P et Q les deux matrices et considérant que l'on fait le produit $P \times Q$, chaque calcul devrait conduire à une relation de la forme $PQ = \lambda \mathrm{I}_{2 \text{ ou } 3}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ ce qui assure de l'inversibilité de P car possède un inverse à droite, et de l'inversibilité de Q car possède un inverse à gauche.
- Il reste alors à écrire la relation $PQ = \lambda \mathrm{I}_{2 \text{ ou } 3}$ sous la forme $P \times \left(\frac{1}{\lambda} Q\right) = \mathrm{I}_{2 \text{ ou } 3}$ ou $\left(\frac{1}{\lambda} P\right) \times Q = \mathrm{I}_{2 \text{ ou } 3}$ pour obtenir l'inverse souhaité.

Caractérisation des matrices inversibles

Exercice| [5111] | 3| Identifier des matrices non-inversibles

Aucune des matrices ci-dessous ne sont inversibles. Pourquoi ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\1&-1&0&1\\1&1&1&1\\1&1&2&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\1&1&-1&1\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\\-1&-1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\-1&1&1&-1\\0&0&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

Pistes de réflexion

- On sait qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si, et seulement si, son rang est égal à n.
- Certaines matrices ne sont clairement pas de rang n car possèdent une ligne/colonne de zéros, ou une ligne/colonne est multiple ou combinaison linéaire triviale d'autres lignes/colonnes.

Exercice| [5110] | 4| Inversibilité et rang d'une matrice

Déterminer parmi les quatre matrices M_1, M_2, M_3 et M_4 données ci-après, celles qui sont inversibles.

$$M_1 = \begin{pmatrix}1&0&-2\\1&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix} \sim_L \dots \sim_L \begin{pmatrix}1&0&-2\\0&-1&4\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$\text{rg}\,(M_1) = \dots$

☐ M_1 est inversible

☐ M_1 n'est pas inversible

$$M_2 = \begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\1&-2&1\end{pmatrix} \sim_L \dots \sim_L \begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\text{rg}\,(M_2) = \dots$

☐ M_2 est inversible

☐ M_2 n'est pas inversible

$$M_3 = \begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&-2\\1&-2&1&1\\-2&1&0&1\end{pmatrix} \sim_L \dots \sim_L \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&-3&0&1\\0&0&2&2\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$$

$\text{rg}\,(M_3) = \dots$

☐ M_3 est inversible

☐ M_3 n'est pas inversible

$$M_4 = \begin{pmatrix}1&2&1&0\\2&1&2&2\\1&2&1&0\\-2&1&1&1\end{pmatrix} \sim_L \dots \sim_L \begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-3&0&2\\0&0&3&\frac{13}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\text{rg}\,(M_4) = \dots$

☐ M_4 est inversible

☐ M_4 n'est pas inversible

Pistes de réflexion

- On sait qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si, et seulement si, son rang est égal à n.
- Il s'agira ici d'exploiter les échelonnements proposés pour conclure en exhibant le rang de la matrice considérée.

Inverse par presse-bouton dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice| [5118] | 5| Inverse d'une matrice 2×2

Pour chacune des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ ci-dessous, calculer le déterminant, et le cas échéant donner l'inverse de ces dernières.

A	$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$	A	$\begin{pmatrix}3 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$	A	$\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$
$\det(A)$		$\det(A)$		$\det(A)$	
A^{-1}		A^{-1}		A^{-1}	

A	$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$	A	$\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 3 & -3\end{pmatrix}$	A	$\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$
$\det(A)$		$\det(A)$		$\det(A)$	
A^{-1}		A^{-1}		A^{-1}	

Pistes de réflexion

- On dispose de la notion de déterminant pour une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ pour caractériser les matrices inversibles de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$...
- ...ainsi que d'une formule donnant l'inverse d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Inversibilité dans $\mathcal{D}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_3^{\pm}(\mathbb{R})$

Exercice| [5119] | 6| Inversibilité d'une matrice diagonale ou triangulaire supérieure

À quelle(s) condition(s) sur le réel m les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & m^2-1 & 0\\ 0 & 0 & m-1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & m^2-5m+6\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & m-2 & 0\\ 0 & 0 & m^2-1\end{pmatrix}$$

Pistes de réflexion

- On sait qu'une matrice diagonale ou triangulaire est inversible si, et seulement si, TOUS ses termes diagonaux sont non nuls.
- Il s'agit donc ici d'exhiber les termes diagonaux des matrices et d'en déduire des équations que doit ensuite satisfaire m pour que ces dernières soient inversibles.

Recherche d'inverse par polynôme annulateur

Exercice| [5114] | 7| Puissance et inversibilité

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

(1). Montrer que $A^3 = (0)$.

(2). En déduire la matrice A n'est pas inversible.

Pistes de réflexion

(1). On commence par déterminer A^2, puis on détermine A^3.

(2). On procède par un raisonnement par l'absurde en supposant que A est inversible jusqu'à écrire une relation fausse qui porte sur A^2.

Exercice| [5115] | 8| Polynôme de matrices et inversibilité

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

(1). Calculer $(A + \mathrm{I}_3)^3$.

(2). La matrice A est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.

Pistes de réflexion

(1). On pourra utiliser la formule du binôme de Newton, en ayant au préalable calculé les premières puissances de A, ou on explicite tout simplement la matrice $A + \mathrm{I}_3$ dont on calcule ensuite le cube.

(2). On essaiera de travailler la relation précédente pour écrire une relation de la forme $A \times M = \mathrm{I}_3$ où M est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on exprimera à l'aide des puissances de A et de I_3.

Exercice| [5116] | 9| Polynôme de matrices et inversibilité

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(1). Déterminer la matrice $A^2 (A - \mathrm{I}_3)$.

(2). La matrice A est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.

Pistes de réflexion

(1). On pourra soit exprimer A^2 et la matrice $A - \mathrm{I}_3$ ou remarquer qu'il s'agit de calculer $A^3 - A$, mais cela demande de calculer A^3.

(2). On essaiera de travailler la relation précédente pour écrire une relation de la forme $A \times M = \mathrm{I}_3$ où M est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on exprimera à l'aide des puissances de A et de I_3.

Exercice| [5117] | 10| Polynôme de matrices et inversibilité

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1). Déterminer A^2 puis $co, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 + \alpha A + \beta \mathrm{I}_4 = (0)$.

(2). En déduire que la matrice A est inversible et expliciter son inverse.

Pistes de réflexion

(1). On pourra utiliser la formule du binôme de Newton, en ayant au préalable calculé les premières puissances de A, ou on explicite tout simplement la matrice $A + \mathrm{I}_3$ dont on calcule ensuite le cube.

(2). On essaiera de travailler la relation précédente pour écrire une relation de la forme $A \times M = \mathrm{I}_3$ où M est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ que l'on exprimera à l'aide des puissances de A et de I_3.

Recherche d'inverse par échelonnement d'une matrice augmentée

Exercice| [5112] | 11| Inverse par échelonnement d'une matrice augmentée

Compléter l'échelonnement suivant pour en déduire l'inversibilité et l'inverse de la matrice A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{4}{3}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{2}{3}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow -1L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \text{ et } A^{-1} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Pistes de réflexion

- On effectue les opérations élémentaires indiquées jusqu'à obtenir l'inverse de la matrice A.

Exercice| [3386] | 12| Inverse par échelonnement

Déterminer les inverses des matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pistes de réflexion

- Pour chaque matrice, on procèdera à un échelonnement réduit en lignes de la matrice augmentée $(A|\mathrm{I}_3)$ en s'assurant le moment venu de l'inversibilité de la matrice, pour obtenir ensuite son inverse.

Exercice| [5113] | 13| Inverse par échelonnement d'une matrice augmentée

Compléter l'échelonnement suivant pour en déduire l'inversibilité et l'inverse de la matrice A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{3}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{2}{3}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \text{ et } A^{-1} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Pistes de réflexion

- On effectue les opérations élémentaires indiquées jusqu'à obtenir l'inverse de la matrice A.

Exercice| [2116] | 14| Étude de l'inversibilité

Étudier l'inversibilité de ces quatre matrices et déterminer leur inverse le cas échéant.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice| [5120] | 15| Étude de l'inversibilité d'une matrice

Déterminer le(s) réel(s) m tel(s) que la matrice $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ est inversible.

Le cas échéant, déterminer l'inverse de la matrice A en fonction de m.

Pistes de réflexion

- On cherchera une condition sur m à partir de la recherche du rang de A qui doit être dans ce cas égal 3 pour que A soit inversible.
- Sous réserve que m satisfasse les conditions précédemment déterminées, on cherchera l'inverse de A par un échelonnement réduit en lignes de la matrice augmentée $(A|\mathrm{I}_3)$.