Conjecturer une expression

Exercice| [5088] | 1| Conjecturer une expression

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Compléter le calque de calcul ci-dessous pour conjecturer une expression de A^n en fonction de n.

	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$				

Expression de A^n :

Pistes de réflexion

- Il s'agira simplement d'utiliser ce calque de calcul pour observer la forme des premières puissances de A pour conjecturer une forme pour A^n...
- qu'il conviendrait ensuite de démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice| [5089] | 2| Conjecturer une expression

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Compléter les calques de calculs ci-dessous pour conjecturer une expression de A^n et B^n en fonction de n.

	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$				

Expression de A^n :

	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$				

Expression de B^n :

Pistes de réflexion

- Il s'agira simplement d'utiliser ce calque de calcul pour observer la forme des premières puissances de A pour conjecturer une forme pour A^n...
- qu'il conviendrait ensuite de démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice| [5090] | 3| Conjecturer une expression | Puissance d'une matrice diagonale

Compléter les calques de calcul ci-dessous pour conjecturer une expression de A^n en fonction de n.

	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$				

$A =$

Expression de A^n :

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&4\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&4\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&4\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$A \ =$

Expression de A^n :

Pistes de réflexion

- Il s'agira simplement d'utiliser ce calque de calcul pour observer la forme des premières puissances de A pour conjecturer une forme pour A^n...
- qu'il conviendrait ensuite de démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice| [5091] | 4| Puissance d'un produit de matrices

Dans cet exercice, on suppose que A est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = P\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}Q$, avec :

$$\begin{cases} P & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ Q & \in & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ QP & = & \mathrm{I}_2 \\ (a,b) & \in & \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Conjecturer une expression pour A^n.

Pistes de réflexion

- Il s'agira d'expliciter le calcul qu'il y a à faire pour calculer A^n comme un produit de multiplications successives, pour observer ensuite un effet de « simplification » dans le produit ainsi écrit.

Binôme de Newton et puissance de matrices

Exercice| [3372] | 5| Manipuler le binôme de Newton

On désigne par A la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $\quad A = \begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(1). Calculer A^2 puis A^3.

(2). Quelle expression de A^n peut-on conjecturer ?

(3). À l'aide du binôme de Newton, déterminer alors $(A+2I_3)^4$.

Pistes de réflexion

- On effectuera le calcul de A^2 et de A^3 pour s'apercevoir que $A^3 = (0)$.
- On appliquera alors le binôme de Newton pour calculer $(A+2\mathrm{I}_3)^4$, en remarquant que certains termes sont nuls.

Exercice| [5092] | 6| Calcul de puissance de matrice par décomposition

Dans tout cet exercice, A désigne la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $\quad A = \begin{pmatrix}2&-1&1\\2&-1&2\\1&-1&2\end{pmatrix}$.

On se propose de déterminer une expression de A^n en fonction de n.

(1). Déterminer la matrice J telle que $A = \mathrm{I}_3 + J$.

(2). Calculer J^2, puis expliciter J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3). (a). Exprimer A^2 en fonction de I_3 et J.

(b). Exprimer A^3 en fonction de I_3 et J.

(c). Exprimer A^4 en fonction de I_3 et J.

(d). Déduire des questions précédentes une expression de A^n en fonction de I_3 et J, puis expliciter la matrice A^n.

(4). Retrouver le résultat de la question précdente à l'aide du binôme de Newton.

Pistes de réflexion

(1). Il suffit de faire $A - \mathrm{I}_3$ pour obtenir la matrice J cherchée...

(2). On trouve que $J^2 = (0)$ ce qui simplifie clairement les puissances suivantes pour J.

(3). (a). On utilise le fait que $A^2 = (\mathrm{I}_3 + J)(\mathrm{I}_3 + J)$ et on développe en tenant compte des simplifications induite par la multiplication par la matrice nulle et des puissances de J.

(b). On utilise le fait que $A^3 = A^2 \times (\mathrm{I}_3 + J)$ que l'on développe en tenant compte des simplifications induite par la multiplication par la matrice nulle et des puissances de J et en reprenant les calculs de la question précédente.

(c). On utilise le fait que $A^4 = A^3 \times (\mathrm{I}_3 + J)$ que l'on développe en tenant compte des simplifications induite par la multiplication par la matrice nulle et des puissances de J et en reprenant les calculs de la question précédente.

(d). L'expression de A^n se déduit des relations précédentes directement.

(4). On s'assure que l'on peut utiliser ici la formule du binôme de Newton, puis on la met en oeuvre, en remarquant que les puissances de J sont rapidement nulles...

Exercice| [5093] | 7| Utilisation d'une matrice nilpotente

Dans tout ce exercice, on désigne par A la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(1). Déterminer deux matrices D et J de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\left\{ \begin{array}{ccc} A & = & D+J \\ D & \in & \mathcal{D}_3(\mathbb{R}) \end{array} \right.$.

(2). Expliciter les puissances de J et de D ;

(3). À l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer une expression de A^n en fonction de n.

Pistes de réflexion

(1). Il est immédiat que $D = 2\mathrm{I}_3$, le reste des coefficients donnant directemet J.

(2). Les calculs de J^2 puis J^3 suffiront pour obtenir une expression explicite de J^n en fonction de n. De même, les puissances d'une matrice diagonale s'obtiennent simplement.

(3). On s'assurera ici que l'on peut utiliser le binôme de Newton, puis on le mettra en oeuvre, en remarquant que les puissances de J annulent de nombreux termes...

Exercice| [5094] | 8| Calcul d'une puissance par décomposition | ESCP 2011 Filière ECT

Dans tout cet exercice, A et K désignent les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } K = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1). (a). Calculer K^2 et K^3.

(b). Déterminer K^n pour tout entier n supérieur ou égal à 3.

(2). (a). Exprimer A en fonction de I_3 et K.

(b). À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer la matrice A^n en fonction des matrices I_3, K, K^2 et n pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

(c). Expliciter alors complètement la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

(d). Vérifier que la formule précédente est encore valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

Pistes de réflexion

(1). (a). On espère que K^3 est égale à la matrice nulle...

(b). ...de sorte que le calcul des puissances suivantes sera plus aisé...

(2). (a). Le lien entre A, I_3 et J est immédiat.

(b). On s'assure que l'on peut appliquer ici la formule du binôme, puis en remarquant que les puissances de J sont raidement nulles, la somme ainsi explicitée contient relativement peu de termes qu'il est facile d'identifier alors.

(c). On utilise la formule précédente pour obtenir les neuf coefficients de la matrice A.

(d). Tout est dans l'énoncé de la question...