Opérations avec les matrices

Exercice| [3382] | 1| Combinaison linéaire de matrices

On considère les trois matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A + B =$

$B - C =$

$A - B - C =$

$A + 2B - C =$

$C - 2A + 3B =$

$2B - A + 3C =$

Pistes de réflexion

- Il s'agit d'une addition de matrices, donc on opére coefficients à coefficients.
- Mais on n'oubliera pas de tenir compte des coefficients présents dans ces combinaisons linéaires.

Exercice| [3383] | 2| Condition de réalisation du produit de deux matrices

On considère les matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sans l'effectuer, le produit matriciel. . .

AB	BA	AC
☐ est possible	☐ est possible	☐ est possible
☐ n'est pas possible	☐ n'est pas possible	☐ n'est pas possible

CA	BC	CB
☐ est possible	☐ est possible	☐ est possible
☐ n'est pas possible	☐ n'est pas possible	☐ n'est pas possible

B^2	A^2	ACA
☐ est possible	☐ est possible	☐ est possible
☐ n'est pas possible	☐ n'est pas possible	☐ n'est pas possible

Pistes de réflexion

- On rappelle qu'un produit matriciel n'est possible que si le nombre de colonne de la première matrice est égal au nombre de lignes de la deuxième matrice.

Exercice| [5085] | 3| Produit de matrices

Déterminer le(s) coefficient(s) manquant(s) dans ces produits matriciels :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ \dots & \dots \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ \dots \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} \dots \\ 14 \\ \dots \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} 2 & \dots & -10 \\ 10 & -12 & \dots \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} \dots & 14 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots \\ 2 & \dots & 6 \\ \dots & 6 & 9 \end{pmatrix}} \end{array}$$

Pistes de réflexion

- Il s'agira d'utiliser ce mode de présentation du calcul du produit de deux matrices pour mettre en forme la formule donnant les coefficients du produit.

Exercice| [5084] | 4| Produit de matrices carrées de d'ordre 2 ou 3

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} & \boxed{} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \boxed{} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} & \boxed{} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \boxed{} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \boxed{} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \boxed{} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \boxed{} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \boxed{} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \boxed{} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \boxed{} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&1\end{pmatrix}$$

Pistes de réflexion

- Il s'agira d'utiliser ce mode de présentation du calcul du produit de deux matrices pour mettre en forme la formule donnant les coefficients du produit.

Exercice| [5086] | 5| Puissance de matrices

Effectuer les produits matriciels successifs suivants. Quel résultat obtient-on dans le dernier encart ?

$$\begin{pmatrix}3&2\\-1&-2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}3&2\\-1&-2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}3&2\\-1&-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3&2\\-1&-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

Pistes de réflexion

- Il s'agira d'utiliser ce mode de présentation du calcul du produit de deux matrices pour mettre en forme la formule donnant les coefficients du produit.

Exercice| [3384] | 6| Produit de trois matrices

Utiliser le calque de présentation ci-dessous pour calculer le produit matriciel QAP où :

$$P = \begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix}2&-1\\0&1\\-2&1\\1&2\end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix}2&1&-1&2\\3&-1&1&2\\-1&2&0&1\end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix}1&-2&-3\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix}-1&2&3\\0&-2&0\\1&2&1\end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix}1&2&3\\0&4&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pistes de réflexion

- On effectue le produit en deux temps.

Systèmes linéaires et matrices

Exercice| [5083] | 7| Combinaison linéaire de matrices

Dans chacun des cas, déterminer le(s) couples(s) de réel (x, y) qui vérifient l'égalité matricielle proposée :

$$(\star_1) \quad x\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\star_2) \quad x\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Pistes de réflexion

(1). On effectuera explicitement la somme des deux matrices du membre de gauche, et on procèdera ensuite à une identification des coefficients qui conduira à la résolution d'un système linéaire.

(2). On procède de même.

Exercice| [5087] | 8| Matrices et systèmes linéaires

Déterminer toutes les matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX = B$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}$.

Pistes de réflexion

- Tout porte à croire que l'on va être amené à résoudre le système de représentation matricielle $(A|B)$...

Bizarreries matricielles

Exercice| [5082] | 9| Contre-exemple(s)

(1). On considère les trois matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(a). Calculer $D = A + B$.

(b). Calculer $E = AC$.

(c). Comparer les matrices DC et $E + BC$. Qu'en conclure ?

(2). On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a). Calculer $D = AB$.

(b). Calculer $E = BC$.

(c). Comparer les matrices DC et AE. Qu'en conclure ?

Pistes de réflexion

(1). (a). Il s'agit d'une addition de matrices, donc on opére coefficients à coefficients.

(b). Il s'agit d'un produit de matrices...donc le calcul de chaque coefficient demande la mise en oeuvre d'un calcul spécifique...

(c). On observera que les deux matrices sont égales ou...différentes.

(2). (a). Il s'agit d'un produit de matrices...donc le calcul de chaque coefficient demande la mise en oeuvre d'un calcul spécifique...

(b). Il s'agit d'un produit de matrices...donc le calcul de chaque coefficient demande la mise en oeuvre d'un calcul spécifique...

(c). On observera que les deux matrices sont égales ou...différentes.