Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ pour $n \leq 4$

Exercice| [5034] | 1| Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

Dans tout ce qui suit, u, v et w désignent trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^4$.
On désigne par F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x+y)\,u + (x-y)\,v + (x+2y)\,w = \overrightarrow{0}\right\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Pistes de réflexion

- On mobilisera la caractérisation des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$, en commençant par s'assurer que F est bien un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ qui contient le vecteur nul de $\mathbb{R}^2$, puis que ce dernier est stable par combinaison linéaire.

Exercice| [3045] | 2| Sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \exists\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{l} x = 2\alpha - \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = -\alpha \end{array}\right.\right\}$$

(1). Vérifier que le vecteur $(2, 1, -1)$ appartient à F.

(2). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(3). Déterminer une famille génératrice de F.

Pistes de réflexion

(1). Il suffit de s'assurer que le vecteur vérifie la caractérisation des éléments de F, à svoir ici s'assurer que ses composantes peuvent s'obtenir à l'aide de deux réels que l'on identifiera.

(2). On mobilisera la propriété caractérisant les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ en établissant notamment la stabilité par combinaison linéaire.

(3). On essaiera d'exprimer un vecteur quelconque de F comme combinaison linéaire de plusieurs vecteurs dont on vérifiera l'appartenance à F.

Exercice| [5030] | 3| Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + z = 0\right\}$$

(1). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(2). Vérifier que les vecteurs $u_1 = (1, 1, -1)$ et $u_2 = (0, 1, 0)$ appartiennent à F.

(3). Justifier que $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$.

Pistes de réflexion

(1). On mobilisera la caractérisation des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, en commençant par s'assurer que F est bien un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ qui contient le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$, puis que ce dernier est stable par combinaison linéaire.

(2). Il est immédiat que u_1 et u_2 satisfont à la caractérisation des éléments de F.

(3). On exploitera la relation définissant les éléments de F pour montrer qu'un élément de F est combinaison linéaire de u_1 et u_2.

Exercice| [5031] | 4| Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

Dans tout cet exercice, u et v désignent deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$.
On considère alors le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x+y+z)\,u + (x-y-z)\,v = \overrightarrow{0}\right\}$$

(1). Déterminer un vecteur de F autre que le vecteur nul.

(2). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(3). Dans le cas où $u = (1, 0, 1)$ et $v = (-1, 1, 0)$, déterminer une famille génératrice de F.

(4). Faire de même dans le cas où $u = (1, 0, 1)$ et $v = (2, 0, 2)$.

Pistes de réflexion

(1). Du fait que l'on ne connaît pas grand chose sur les vecteurs u et v, une des façon d'obtenir un tel vecteur consisterait à annuler simultanément la quantité $x + y + z$ et $x - y - z$.

(2). On mobilisera la caractérisation des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, en commençant par s'assurer que F est bien un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ qui contient le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$, puis que ce dernier est stable par combinaison linéaire.

(3). On exploitera la relation définissant les éléments de F pour essayer de montrer qu'un élément de F est combinaison linéaire d'autres vecteurs dépendant sûrement de u et v.

(4). On reprend simplement le raisonnement précédent.

Exercice| [5032] | 5| Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x = y \text{ et } x + z + t = 0\right\}$$

(1). Donner un vecteur de F autre que le vecteur nul.

(2). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(3). Justifier que $F = \mathrm{Vect}\,((1, 1, -1, 0), (1, 1, 0, -1))$

Pistes de réflexion

(1). On procèdera par tâtonnement. . .

(2). On mobilisera la caractérisation des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, en commençant par s'assurer que F est bien un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ qui contient le vecteur nul de $\mathbb{R}^4$, puis que ce dernier est stable par combinaison linéaire.

(3). On exploitera la relation définissant les éléments de F pour essayer de montrer qu'un élément de F est combinaison linéaire des deux vecteurs proposés.

Exercice| [5033] | 6| Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0 \text{ et } x - y - z = 0\right\}$$

(1). Déterminer un vecteur v de $\mathbb{R}^3$ de sorte que :

$$(u = (x, y, z) \in F) \quad \Leftrightarrow \quad (u \in \text{Vect}\ (v))$$

(2). Qu'en déduire pour la structure de F ?

Pistes de réflexion

(1). On exploitera la relation définissant les éléments de F pour essayer de montrer qu'un élément de F est combinaison linéaire de ce fameux vecteur u qu'il convient de déterminer.

(2). F étant en fait l'ensemble des combinaisons linéaires d'un seul vecteur c'est une droite vectorielle, mais surtout...

Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 5$

Exercice| [5035] | 7| Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^6$

On considère F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^6$ défini par :

$$F = \left\{(x_1, \ldots, x_6) \in \mathbb{R}^6,\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0\right\}$$

(1). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^6$.

(2). Déterminer une famille $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_5)$ de 5 vecteurs de $\mathbb{R}^6$ telle que $F = \text{Vect}\ (\mathcal{F})$.

Pistes de réflexion

(1). On mobilisera la caractérisation des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^6$, en commençant par s'assurer que F est bien un sous-ensemble de $\mathbb{R}^6$ qui contient le vecteur nul de $\mathbb{R}^6$, puis que ce dernier est stable par combinaison linéaire.

(2). On exploitera la relation définissant les éléments de F pour essayer de montrer qu'un élément de F est combinaison linéaire de vecteurs à déterminer.

Exercice| [5036] | 8| Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

Dans tout ce qui suit, n désigne un entier naturel non nul.
On désigne par F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$F = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x_k = 0\right\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Pistes de réflexion

- On mobilisera la caractérisation des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, en commençant par s'assurer que F est bien un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui contient le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$, puis que ce dernier est stable par combinaison linéaire.