EX. 1 | Réf. 4948

On effectue une suite de tirages au hasard dans une urne, qui contient initialement une boule blanche et une boule noire, de la manière suivante :

- à chaque tirage d'une boule blanche, on replace cette boule dans l'urne, puis l'on rajoute des boules blanches jusqu'à avoir multiplié par deux le nombre de boules blanches dans l'urne ;
- si l'on tire la boule noire, on arrête les tirages.

Ainsi, le nombre de boules blanches dans l'urne est multiplié par deux à chaque étape (sauf la dernière). On admet que l'expérience aléatoire est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « les n premiers tirages ne donnent que des boules blanches » et l'on pose $u_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que : $\mathbb{P}(B_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$.

3. On note B l'événement « les tirages ne s'arrêtent jamais ».

a. Exprimer B en fonction des B_n.
On admet pour la suite que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(B)$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que : $-\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+2^{-k}\right)$.

c. Montrer la convergence de la série $\sum_{k\geq 0} \ln\left(1+2^{-k}\right)$.

d. En déduire que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4948

1. On a $B_{n+1} \subset B_n$ trivialement, ce qui assure le résultat par le théorème de la limite monotone.

2. On mobilisera la formule des probabilités composées.

3. **a.** B est l'intersection de tous les B_n.

b. On exprime $-\ln(u_n)$ et on obtient directement la somme proposée.

c. On majore le terme général de la série pour obtenir la convergence à l'aide d'une inégalité connue sur $\ln$.

d. On déterminer la limite de u_n par composition avec la fonction exponentielle de la somme de la série précédente.

EX. 2 | Réf. 4949

Soient N un entier naturel non nul et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On suppose que toutes les variables aléatoires sont définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $[\![0; N]\!]$.
Si Z est une variable aléatoire à valeur dans $[\![0; N]\!]$, on pose :

$$\forall s \in \mathbb{R},\ G_Z(s) = \mathbb{E}\left(s^Z\right) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}([Z=k])\, s^k$$

1. On suppose que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$. Déterminer G_X.

2. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0; N]\!]$, et $G_X = G_y$, alors X et Y suivent la même loi.

3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![0; N]\!]$.
Exprimer G_{X+Y} en fonction de G_X et G_Y.

4. Déterminer G_Y lorsque Y suit une loi binomiqle de paramètr n et p.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner le développement limité à l'ordre n en 0 de $x \longmapsto (1-x)^{-5}$ (on exprimera les coefficients à l'aide des coefficients binomiaux).

6. Un éleveur possède 5 lapines. Chacune des lapins engendre un nombre aléatoire de lapins. La lapine numéro i engendre

X_i lapins. On suppose que X_1, ..., X_5 sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1;7]\!]$. On note Z le nombre total de laperaeaux.

a. Déterminer une expression simple de G_Z.

b. En déduire la probabilité que le nombre de laperaux soit égal à 20.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4949

1. C'est un calcul direct.
2. On s'intéresse aux dérivées successives des deux fonctions G_X et G_Y pour identifier les lois.
3. On décompose l'événement $[X+Y=n]$ en deux événements portrant sur X et Y qui sont alors indépendants.
4. Y peut être vue comme la somme de variables indépendantes et on exploite le résultat précédent.
5. C'est un calcul classique, qui consiste à réciter sa formule du cours.
6. **a.** On exploite l'indépendance des variables aléatoires.

   b. On combine l'utilisation du binôme et le développement limité précédemment écrit, et on recherche le coefficient du x^{20} de G_Z.

EX. 3 | Réf. 4950

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent à elles deux 2 boules indiscernables. À chaque étape, on choisit de manière équiprobable un nombre de $[\![1;2]\!]$.

- Si ce nombre est inférieur ou égal au nombre de boules contenues dans U_1, on prend une boule de U_1 que l'on met dans U_2.
- Si ce nombre est strictement supérieur au nombre de bouels contenues dans U_1, on prend une boule de U_2 que l'on met dans U_1.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega\mathcal{A},\mathbb{P})$.
Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on note Z_p la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 à l'étape p.
Ainsi, Z_0 est la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1, Z_1 est la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après une étape, etc.

1. On pose $Y_p=\begin{pmatrix}\mathbb{P}([Z_p=0])\\ \mathbb{P}([Z_p=1])\\ \mathbb{P}([Z_p=2])\end{pmatrix}$. Déterminer une matrice $A\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $p\in\mathbb{N}$, $Y_{p+1}=AY_p$.

   Soit A la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\1&0&1\\0&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$
2. Montrer que 1 et -1 sont valeurs propres de A.
3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
4. On pose $Y_0=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}$. Pour tout $k\in[\![0;2]\!]$, étudier l'existence d'une limite pour $\mathbb{P}([Z_p=k])$ lorsque p tend vers $+\infty$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4950

1. On utilise la formule des probabilités totales, puisque le tirage à un instant donné est conditionné par l'état de l'urne à l'instant précédent.
2. Tout moyen est bon, surtout celui qui pourra permettre d'obtenir des éléments piur la question précdente.
3. Reste à s'assurer soit qu'il y a une troisième valeur propre, soit que les dimensions des sous-espaces propres conviennent.
4. On remarquera que $Y_p=Y_0$.

EX. 4 | Réf. 4951

Deux joueurs J_1 et J_2 jouent l'un après l'autre (J_1 puis J_2, puis J_1, puis J_2, etc.). Lorsque c'est son tour, chaque joueur doit effectuer un coup qu'il réussit avec une probabilité $p_1 \in]0;1[$ pour le joueur J_1 et une probabilité $p_2 \in]0;1[$ pour le joueur J_2. Tous les coups sont indépendants. Le jeu se termine dès qu'un joueur réussit son coup, auquel cas, il gagne.
On note $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$.

1. Calculer la probabilité de l'événement G_1 « le joueur J_1 gagne » (resp. de G_2 « le joueur J_2 gagne »).
2. Vérifier que le jeu se termine de façon quasi certaine au bout d'un nombre fini de coups.
   Quelle condition doit vérifier p_1 et p_2 pour que le jeu soit équitable pour les deux joueurs.
3. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de coups joués jusqu'à la fin du jeu. Calculer l'espérance de T.
   On suppose désormais qu'il y a une infinité de joueurs J_1, J_2, ..., J_n,...qui réussissent leurs coups (toujours indépendamment les uns des autres) avec des probabilités respectives p_1, p_2,..., p_n,...($p_i \in]0;1[$) ; ainsi un joueur qui accède au jeu, mais qui n'a pas gagné à son tour, est éliminé et la « main » ne lui revient plus.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $q_n = 1 - p_n$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité de l'événement G_n « le joueur J_n gagne ». Le jeu peut-il eêtre équitable ?
5. À quelle condition (analytique) sur les nombres q_1, ..., q_n,...le jeu se termine-t-il quasiment-toujours au bout d'un nombre fini de coups ? Donner un exemple de valeurs de q_n pour lequel c'est le cas et un exemple de caleurs de q_n pour lequel ce n'est pas le cas.

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4951

1. Il faudra tenir compte de la parité du numéro de coup joué, et tout cela ressemble bien à un processus géométrique dont il faut s'inéresser au cumul des valeurs.
2. On remarquera que $\mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(G_2) = 1$ pour l'arrêt du jeu.
3. On discutera suivant la parité du nombre de parties jouées. Le calcul de l'espérance de T sera ramené à des séries géométriques dérivées.
4. $\mathbb{P}(G_n)$ se calcule comme précédemment. Le côté non équitable du jeu est évident.
5. On calculera la suite des sommes partielles de $\sum \mathbb{P}(G_n)$ par téléscopage.