EX. 1 | Réf. 4939

1. Soit $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

   Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx} g(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Calculer I_0 lorsque g est définie par :
   a. $g : x \longmapsto x\mathrm{e}^{-x}$
   b. $g : x \longmapsto \dfrac{\arctan(x)}{1+x^2}$
3. On revient au cas général.
   Soit M un majorant de $|g|$, c'est à dire un réel tel que pour tout $x \in [0;1]$, $|g(x)| \leq M$.
   Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
4. Soit $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 1$.

   Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $J_n = n\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4939

1. Ce n'est pas une intégrale impropre...
2. **a.** On procède par intégration par parties.
   b. L'intégration est directe ici.
3. On majore simplement I_n par le terme général d'une suite qui converge vers 0.
4. On calcule J_n par intégration par parties et on applique les résultats des questions précédentes à f' qui est continue sur $[0;1]$.

EX. 2 | Réf. 4937

Soit p un entier naturel.

Pour tout entier naturel n, on note $S_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer l'existence de S_n.
2. Pour a et b entiers naturels, avec $b > 0$, on note $T(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^a \mathrm{e}^{-bx}\,\mathrm{d}x$.

   Montrer l'existence de $T(a,b)$ et calculer $T(a,b)$ en fonction de a et b.
3. Pour $n \geq 1$, montrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-kx} + \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x - 1}$.
4. En déduire : $\forall n \geq 1,\ S_0 = (p+1)!\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+2}} + S_n$.
5. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
6. Déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. Donner alors la valeur de S_0.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4937

1. La borne 0 se gère par un prolongement par continuité, en la vorne infinie par une comparaison à une intégrale de Riemann.
2. On peut effectuer le changement de variable $bx = t$ pour se ramener à une famille d'intégrales connues.
3. On fera intervenir la somme des termes d'une suite géométrique.
4. Il suffit de multiplier la relation obtenue par x^{p+1} et intégrer les deux membres de l'égalité.
5. La convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'obtient puisqu'il apparaît la somme partielle d'une série de Riemann convergente.

6. On pourra remarquer que l'on peut majorer la fonction définissant S_n qui après intégration donnera un majorant de S_n qui converge vers 0.
7. C'est immédiat à partir de la question précédente.

EX. 3 | Réf. 4936

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t}{\mathrm{e}^{\,t}-1} \end{array} \right.$

1. Montrer que φ admet un prolongement par continuité en $t=0$.
   On notera encore φ la fonction ainsi prolongée.

   On admet que cette fonction, admet, en 0 un développement limité à tout ordre $N \geq 0$ de la forme :
$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{t^k}{k!} + \underset{t\to 0}{o}\left(t^N\right)$$
2. Calculer b_0, b_1, b_2 et b_3.
3. Montrer que $t \longmapsto \varphi(t) - b_1 t$ est une fonction paire.
   En déduire b_{2n+1} pour tout $n \geq 1$.
4. On pose pour tout réel x et tout réel t : $f(x,t) = \mathrm{e}^{\,tx}\varphi(t)$.
   Montrer que $t \longmapsto f(x,t)$ admet un développement limité à tout ordre N au voisinage de 0, que l'on écrit :
$$f(x,t) = \sum_{k=0}^{N} B_k(x) \frac{t^k}{k!} + \underset{t\to 0}{o}\left(t^N\right)$$
   et montrer que, pour tout $k \geq 0$, B_k est un polynôme unitaire de degré k.
   Exprimer ensuite $B_k(0)$ en fonction de b_k.
5. Monter que pour tout $k \geq 0$, $B_k(1-x) = (-1)^k B_k(x)$.
   En déduire la valeur de $B_k(1)$ en fonction de b_k, pour tout $k \geq 1$.
6. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $B_k(x+1) - B_k(x) = kx^{k-1}$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4936

1. On utilise les équivalents usuels en 0.
2. On procède au développement limité explicitement pour obtenir les coefficients recherchés par unicité du développement limité.
3. La parité est évidente, et le développement limité d'une fonction paire ne contient que des monômes de degré pair.
4. On obtient l'existence du développement limité par produit de développement limité, et on essaie d'exprimer les monômes du produit ainsi tronqué et qui donneront les polynômes B_k, à partir de la forme du produit de deux polynômes.
5. Il suffit de comparer $f(1-x,t)$ et $f(x,t)$ et de faire de même pour leur développement limité.
6. C'est le même travail que précédemment, en travaillant avec $f(x+1,t) - f(x,t)$.

EX. 4 | Réf. 4935

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & \dfrac{2n+2}{2n+5} \times u_n \end{array} \right.$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ que l'on déterminera.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \dfrac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}$
   Déterminer α pour que la série de terme général $\ln(v_n)$ converge.
3. En déduire que la série de terme général u_n converge.

4. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\quad 2\sum_{k=1}^{n+1} ku_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} ku_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k$

5. En déduire la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4935

1. On montre que u_n est décroissante minorée 0. Pour sa limite, on s'intéresse à la convergence de la série téléscopique $\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ qui donnera ensuite la convergence de la suite de terme général $\ln(u_n)$, puis celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. On commence par expliciter v_n, pour en effectuer un développement asymptotique de $\ln(v_n)$ à l'ordre 2.

3. On exprime u_n en fonction de la suite des sommes partielles de la série $\sum \ln(v_n)$ et de la somme de cette dernière pour donner un équivalent de u_n et s'assurer de la convergence de $\sum u_n$.

4. La définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne que $(2n+5)u_{n+1} = (2n+2)u_n$ et on somme ces égalités.

5. De la relation précédente, on obtient une relation entre quelques termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

EX. 5 | Réf. 4938

1. **Question préliminaire :** soient f et g deux fonctions définies sur un segment $[a;b]$ avec $a < b$ et continues sur ce segment.

Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b (f(t) + \lambda g(t))^2 \,\mathrm{d}t \geq 0$.

En déduire que : $\displaystyle\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t$

Dans tout ce qui suit, $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = 0$.

2. En justifiant et en utilisant la relation : $\quad \forall x \in [a;b]\,,\ f(x) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$

montrer que : $\displaystyle\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f'(x)|^2 \,\mathrm{d}x$

3. Caractériser le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

4. Montrer que $\displaystyle\int_a^b |f'(x)f(x)| \,\mathrm{d}x \leq \frac{b-a}{2}\int_a^n |f'(x)|^2 \,\mathrm{d}x$.

5. Caractériser le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

EX. 5 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4938

1. On intègre une fonction positive et continue, et on obtient alors un polynôme en λ dont on connaît le signe, et il suffit alors de mettre cela en correspondance avec le discriminant de ce dernier.

2. On applique l'inégalité précédente en écrivant $f'(x) = 1 \times f'(x)$ pour obtenir un premier majorant de $|f(x)|$, et on intègre alors l'inégalité obtenue.

3. Il ne peut y avoir égalité que si toutes les inégalités écrites sont des égalités, notamment celles portant sur f', ce qui donnera que $|f'|$ est nulle et amènera à f nulle.

4. On pourra majorer $|f(x)|$ par $u(x) = \displaystyle\int_a^x |f'(t)| \,\mathrm{d}t$ et faire ensuite apparaître un majorant de $\displaystyle\int_a^b |f'(t)f(t)| \,\mathrm{d}t$ de la forme $\displaystyle\int_a^b u'(t)u(t)\,\mathrm{d}t$ que l'on sait primitiver. Il restera alors à appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

5. On vérifie que les fonctions affine conviennent et que ce sont les seules, car l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz ne s'obtient que lorsque les vecteurs sont colinéaires.