EX. 1 | Réf. 4965

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geq 1}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$, indépendantes, et de même loi uniforme discrète sur $[\![1; N]\!]$.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$ et on admet que T_n est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
Par ailleurs, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $d_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$.

1. Montrer que si X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k])$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer pour tout $k \in [\![1; N]\!]$, la probabilité $\mathbb{P}([T_n \leq k])$.
3. **a.** Montrer que la suite $(d_n)_{n\geq 1}$ converge et calculer sa limite.
   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer l'espérance de la variable aléatoire T_n notée $\mathbb{E}(T_n)$ en fonction de N et de d_n.
   c. En déduire la limite de la suite $(\mathbb{E}(T_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4965

1. On reviendra à la définition de l'espérance d'une variable aléatoire à support fini en remarquant que $\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([K > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$.
2. On cherchera un lien entre $[T_n \leq k]$ et les évènements $[U_i \leq k]$ en exploitant le caractère indépendant des variables U_i.
3. **a.** On remarquera que d_n est une somme finie de termes convergeant tous vers 0.
   b. On mobilisera le résultat de la question 1 que l'on adaptera à T_n puisque cette dernière ne suit pas une loi uniforme sur $[\![1; N]\!]$, mais dont seulement le support est $[\![1; N]\!]$.
   c. C'est une conséquent de la question précdente.

EX. 2 | Réf. 4966

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs décroissante convergeant vers 0. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - nu_n$$

1. On suppose dans cette question que la série de terme général u_n converge. Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est bornée.
2. On suppose dans cette question que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est bornée.
   a. Calculer $v_n - v_{n-1}$.
   b. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge.
   c. Montrer que la série de terme général $(n-1)(u_{n-1} - u_n)$ converge.
   d. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (k-1)(u_{k-1} - u_k) \geq nu_n$.
   e. Montrer que la série de terme général u_n converge.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4966

1. On remarquera que $\sum u_n$ est une série à termes positifs convergente, donc la suite de ses sommes partielles est majorée.
2. **a.** Le calcul se fait en revenant à la définition de $(v_n)_{n\geq 1}$.
   b. La question précédente donne les variations de la suite $suiv, n, 1$ qui est majorée par hypothèse.
   c. On pourra remarquer que l'on a affaire à une série téléscopique.

d. On repasssera par la suite des sommes partielles de la série $\sum (k-1)\left(u_{k-1}-u_k\right)$.

e. On travaille là encore avec une série à termes positifs dont on cherche à majorer la suite des sommes partielles.

EX. 3 | Réf. 4964

Soit n un entier naturel.

1. Montrer qu'il existe un polynôme P_n à coefficients réels tel que pour tout $t \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$(\sin(t))^{2n+1} P_n\left(\frac{1}{\tan^2(t)}\right) = \sin((2n+1)t)$$

On pourra s'intéresser à $(\cos(t) + \mathrm{i}\sin(t))^{2n+1}$.

2. Montrer que le polynôme P_n défini dans la question précédente est unique.

3. Préciser le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4964

1. On pourra utiliser la formule du binôme de Newton sur l'écriture proposée en indication, et prendre la partie imaginaire du résultat.

2. On raisonnera en partant de deux polynômes qui conviennent, et dont la différence est alors un polynôme qui possède une infinité de racines.

3. Le coefficient dominant et le degré de P_n ont en fait été obtenus dès la première question.

EX. 4 | Réf. 4967

On considère la fonction f donnée par : $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

2. Soit g la fonction définie par :

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \left[\frac{1}{2}; 1\right[\cup \left]1; \frac{3}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{\ln(t)} - \dfrac{1}{t-1} \end{array} \right.$$

Montrer que g est prolongeable en une fonction continue sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

3. Montrer que $\displaystyle\int_x^{x^2} g(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$.

4. En déduire que f est prolongeable par continuité en 1.

5. Déterminer le tableau de variation de f.

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4967

1. On déterminera dans un premier temps le domaine de définition de $t \longmapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ et on remarquera que chaque intervalle qui le constitue est stable par $x \longmapsto x^2$.

2. On déterminera la limite de g en 1 en cherchant un développement limité de cette dernière en ce point.

3. On introduira une primitive de la fonction G pour déterminer la limite demandée.

4. C'est une simple interprétation de la question précdente mais qui demande à revenir à l'écriture complète de f.

5. Il faudra obtenir la dérivée de f en faisant intervenir une primitive de l'intégrande la définissant, puis ensuite utiliser la formule de dérivée d'une composée.