EX. 1 | Réf. 4968

On pose pour tout entier naturel n, $u_n = \displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{t\sin(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = (-1)^{n-1}\,|u_n|$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$\frac{2n\pi}{1+n^2\pi^2} \leq |u_n| \leq \frac{2(n-1)\pi}{1+(n-1)^2\pi^2}$$

   Indication : on pourra étudier la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$.

3. Soit pour tout n entier naturel, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que pour tout entier naturel :

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} |u_{2k-1}| - |u_{2k}|$$

4. Montrer que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. Montrer que la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, puis que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. Montrer que la convergence de la série n'est pas une convergence absolue.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4968

1. On discutera du signe sur $[(n-1)\pi; n\pi]$ de $t \longmapsto \sin(t)$ pour obtenir le signe de l'intégrale définissant u_n.
2. On obtiendra un encadrement de u_n en utilisant les variations de $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ en discutant de la parité de f pour travailler les différents encadrements.
3. On sommera les termes de la somme en discutant suivant la parité de l'indice de sommation en faisant intervenir l'autre expression de u_n.

EX. 2 | Réf. 4969

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'endomorphisme Φ_n de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\Phi_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & (x_1+x_2, x_2+x_3, \ldots, x_{n-1}+x_n, x_n+x_1) \end{array} \right.$$

1. Écrire la matrice de Φ_4 dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. Soit $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathrm{Ker}\,(\Phi_n)$.
   a. Montrer que $x_n = (-1)^n\,x_n$.
   b. Identifier alors $\mathrm{Ker}\,(\Phi_n)$ en fonction de n.
3. Déterminer le rang de Φ_n en fonction de la parité de n.
4. On suppose dans cette question que n est impair.
   Montrer que la k^e composante de $\Phi_n^{-1}\,(y_1,\ldots,y_n)$ est :

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{i-k+1}y_i + \sum_{i=k}^{n}(-1)^{k-i}y_i\right)$$

   où $k \in \{1,\ldots,n\}$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4969

1. On calcule directement les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. **a.** On explicite le fait que $(x_1,\ldots,x_n)$ est un élément du noyau de Φ, ce qui conduit à un système dont toutes les lignes dépendent de la suivante, ce qui conduit à cette relation.

b. On discutera de la dimension du noyau en fonction de la parité de n.

3. On reprend simplement les discussions précédentes.

4. On pensera à justifier l'existence de Φ^{-1}, et on traduira la recherche de $\Phi^{-1}(y_1, \ldots, y_n)$ par un système que l'on essaiera de résoudre par combinaison dans un premier temps, puis par substitution en cascades pour obtenir les relations demandées.

EX. 3 | Réf. 4962

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On considère deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $[\![1; n]\!]$.
On note M la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont l'élément situé à la ie ligne et à la je colonne est égal à $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j])$.
On note par ailleurs U_X et U_Y) les vecteurs colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définis par :

$$U_X = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X=1]) \\ \mathbb{P}([X=2]) \\ \vdots \\ \mathbb{P}([X=n]) \end{pmatrix} \text{ et } U_Y = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([Y=1]) \\ \mathbb{P}([Y=2]) \\ \vdots \\ \mathbb{P}([Y=n]) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors la matrice M est de rang 1.

2. On suppose dans cette question que la matrice M est de rang 1. On note pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, C_j le vecteur colonne de $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ égal à la je colonne de la matrice M.

a. Montrer que $C_1 + C_2 + \ldots + C_n = U_X$.

b. En déduire que pour tout entier $j \in [\![1; n]\!]$, il existe un réel β_j tel que $C_j = \beta_j U_X$.

c. Montrer pour tout entier $j \in [\![1; n]\!]$, l'égalité $\mathbb{P}([Y = j]) = \beta_j$.

d. En déduire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4962

1. On remarquera que toutes les colonnes de M sont proportionnelles à la première.

a. Il suffit de faire apparaître un système complet d'événement portant sur Y.

b. On a que U_X est combinaison linéaire de $C_1, \ldots, C_n$ et on connaît la dimension de $\mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_n)$.

c. On utilisera cette fois-ci un système complet d'événements portant sur X, et il suffira de sommer les lignes de la matrice colonne C_j.

d. Il s'agira de comparer les coefficients des matrices colonnes C_j avec la relation que doivent vérifier X et Y pour être indépendantes.

EX. 4 | Réf. 4963

Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Soit $p \geq 1$ un entier. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} n^{i-1} = \frac{(n+1)^p - 1}{n}$.

2. Soit A la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Calculer A^p pour $p \geq 1$.

3. Soit $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ la matrice carrée de taille n définie par :

$$b_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Calculer B^p pour $p \geq 1$.

4. Montrer que B est inversible et calculer son inverse.

EX. 4 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 4963

1. On sera amener à mobiliser le binôme de Newton pour développer $(n+1)^p$, dont il faudra peut-être travailler quelques éléments pour voir apparaître la somme cherchée.
2. On conjecture que $A^p = n^{p-1}A$ qu'il convient de démontrer par récurrence.
3. On remarque que $B = A + \ldots$ et on utilise le binôme de Newton.
4. On exploite l'expression précédente pour expliciter B^2 en fonction de B et de I_n, ce qui permet d'obtenir une écriture du type $B \times \ldots = \mathrm{I}_n$ et donc l'inversibilité et l'inverse de B.