Représentation matricielle d'une famille de vecteurs et applications

Exercice| [5019] | 1| Famille génératrice de $\mathbb{R}^3$

On considère la famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnée par :

$$\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3, u_4) \text{ où } \begin{cases} u_1 &= (0,1,3) \\ u_2 &= (4,5,6) \\ u_3 &= (-1,0,1) \\ u_4 &= (1,1,1) \end{cases}$$

(1). Justifier que la famille $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

(2). On désigne par u l'élément de $\mathbb{R}^3$ donné par $u = (1, 2, -1)$.
Déterminer deux quadruplets de réels (a_1, a_2, a_3, a_4) tel que :

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4$$

Pistes de réflexion

(1). On détermine le caractère générateur de $\mathcal{F}$ soit en revenant à la définition ce qui conduira à s'interroger sur la comptabilité d'un système formé à partir des vecteurs u, u_1, u_2, u_3 et u_4, soit en utilisant la caractérisation d'une famille génétratrice par le rang de sa représentation matricielle.

(2). On n'échappera pas ̀la résolution d'un système linéaire pour proposer deux quatruplets qui conviennent.

Exercice| [5020] | 2| Famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$

On considère la famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnée par :

$$\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3) \text{ où } \begin{cases} u_1 &= (1,0,1) \\ u_2 &= (1,1,1) \\ u_3 &= (-1,-1,3) \end{cases}$$

On donne par ailleurs l'échelonnement en lignes suivant :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{4}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{4}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

(1). Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$.

(2). On désigne par u l'élément de $\mathbb{R}^3$ donné par $u = (-1, 0, 1)$.
Déterminer un triplet de réels (a_1, a_2, a_3) tel que :

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$$

Ce triplet est-il unique ?

Pistes de réflexion

(1). Le caractère libre et générateur de la famille $\mathcal{F}$ s'obtient soit en revenant à la définition, ce qui pour l'un revient à regarder si un système homogene, celui donné en l'occurrence, admet une autre solution que la solution triviale, et pour l'autre, revient à s'intéresser à la compatibilité d'un système dont on donne ici l'échelonnement pour le cas homogène, mais qui suffit pour en observer sa compatibilité.
Sinon on exploite cet échelonnement pour mobiliser la caractérisation des familles libres et génératrices par le rang de leur représentation matricielle.

(2). On est amené à résoudre un système dont l'échelonnement nous est donné, mais qu'il convient de reprendre avec un second membre qui n'est nul.

Exercice| [5018] | 3| Exploiter la représentation matricielle d'une famille de vecteurs

Compléter les éléments ci-dessous :

Matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}_1$ et échelonnement en lignes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim_L \dots \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Espace $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{F}_1$ libre ?

$\mathcal{F}_1$ génératrice de $\mathbb{R}^n$?

Vecteurs de la famille de vecteurs $\mathcal{F}_1$

Matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}_2$ et échelonnement en lignes

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim_L \dots \sim_L \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Espace $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{F}_2$ libre ?

$\mathcal{F}_2$ génératrice de $\mathbb{R}^n$?

Vecteurs de la famille de vecteurs $\mathcal{F}_2$

Matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}_3$ et échelonnement en lignes

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim_L \dots \sim_L \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Espace $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{F}_3$ libre ?

$\mathcal{F}_3$ génératrice de $\mathbb{R}^n$?

Vecteurs de la famille de vecteurs $\mathcal{F}_3$

Matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}_4$ et échelonnement en lignes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim_L \dots \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Espace $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{F}_4$ libre ?

$\mathcal{F}_4$ génératrice de $\mathbb{R}^n$?

Vecteurs de la famille de vecteurs $\mathcal{F}_4$

Matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}_5$ et échelonnement en lignes

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim_L \dots \sim_L \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

Espace $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{F}_5$ libre ?

$\mathcal{F}_5$ génératrice de $\mathbb{R}^n$?

Vecteurs de la famille de vecteurs $\mathcal{F}_5$

Matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}_6$ et échelonnement en lignes

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ -1 & -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim_L \dots \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 2 \end{pmatrix}$$

Espace $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{F}_6$ libre ?

$\mathcal{F}_6$ génératrice de $\mathbb{R}^n$?

Vecteurs de la famille de vecteurs $\mathcal{F}_6$

Matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}_7$ et échelonnement en lignes

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim_L \dots \sim_L \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Espace $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{F}_7$ libre ?

$\mathcal{F}_7$ génératrice de $\mathbb{R}^n$?

Vecteurs de la famille de vecteurs $\mathcal{F}_7$

Matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}_8$ et échelonnement en lignes

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \\ -2 & 14 & 4 & -14 \\ -2 & 2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim_L \dots \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -15 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Espace $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{F}_8$ libre ?

$\mathcal{F}_8$ génératrice de $\mathbb{R}^n$?

Vecteurs de la famille de vecteurs $\mathcal{F}_8$

Pistes de réflexion

Pour chaque famille :

- On identifiera l'espace $\mathbb{R}^n$ dans lequel on travaille en regardant le nombre de lignes de la matrice de la famille de vecteurs
- On exploitera l'échelonnement en lignes proposé pour obtenir le rang de la matrice de la famille de vecteurs et conclure quant à sa liberté et à son caractère générateur au regard du nombre de vecteurs de la famille et de l'espace $\mathbb{R}^n$ dans lequel on travaille.
- On relèvera les vecteurs de la famille de vecteurs, en récupérant les informations contenues dans les colonnes de la matrice donnée.

Manipuler les définitions | Familles libres | Familles génératrices

Exercice| [2971] | 4| Liberté d'une famille obtenue par combinaison linéaire

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ une famille libre de 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

On considère alors la famille $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_4)$ où : $\left\{\begin{array}{l} v_1 = 2u_1 + u_2 \\ v_2 = u_1 - 3u_2 \\ v_3 = u_4 \\ v_4 = u_2 - u_1 \end{array}\right.$.

La famille $\mathcal{G}$ est-elle encore une famille libre de $\mathbb{R}^4$?

Pistes de réflexion

- On reviendra dans un premier temps à la définition de ce qu'est une famille libre, pour écrire une combinaison linéaire nulle portant sur les vecteurs $v_1, \ldots, v_4$.
- Cette dernière combinaison linéaire nulle portant sur les vecteurs d'une famille libre, on sait que tous les coefficients de cette dernière sont nécessairement nuls, et ainsi on pourra écrire un système portant sur ces coefficients, dont on montrera pour tous, la nullité, ce qui assurera la liberté de la famille $\mathcal{G}$.

Exercice| [5021] | 5| Caractère générateur obtenu par combinaison linéaire

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_6)$ une famille génératrice de $\mathbb{R}^5$.

On considère alors la famille $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_6)$ où : $\left\{\begin{array}{lcl} v_1 & = & u_1 - u_6 \\ v_2 & = & u_2 - u_6 \\ v_3 & = & u_3 - u_6 \\ v_4 & = & u_4 - u_6 \\ v_5 & = & u_5 - u_6 \end{array}\right.$

La famille $\mathcal{G}$ est-elle encore génératrice de $\mathbb{R}^5$?

Pistes de réflexion

- On reviendra à la définition de ce qu'est une famille génératrice, c'est à dire à la capacité que l'on a de décomposer un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^5$ comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille.
- La famille $\mathcal{G}$ étant construite à partir de $\mathcal{F}$, on transfèrera le problème de la décomposition d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^5$ sur $\mathcal{G}$, à un problème de décomposition d'un vecteur quelconque sur $\mathcal{F}$.

Exercice| [5022] | 6| Famille libre obtenue par complétion

On considère $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_4)$ une famille libre de $\mathbb{R}^6$, et on désigne par u un vecteur de $\mathbb{R}^6$ qui n'appartient pas à $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$.

Montrer que la famille $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_4)$ donnée par $\left\{\begin{array}{lcl} v_1 & = & u_1 + u \\ v_2 & = & u_2 + u \\ v_3 & = & u_3 + u \\ v_4 & = & u_4 + u \end{array}\right.$ est encore une famille libre de $\mathbb{R}^6$.

Pistes de réflexion

- On reviendra à la définition de ce qu'est une famille libre en utilisant une combinaison linéaire nulle des vecteurs de $\mathcal{G}$.
- On effectuera alors un raisonnement par l'absurde pour montrer que tous les coefficients de cette combinaison linéaire sont nuls, compte-tenu du fait que u n'appartient pas à $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$.