Exercice| [5258] | 1| Synthèse d'algèbre linéaire | Extrait ENS 2018 Filière BL

Les cinq questions qui suivent sont indépendantes entre elles, mais l'on peut cependant réinvestir dans les questions **(4)** et **(5)** les qrésultats des questions précédentes.

Pour un entier $n \geq 1$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

(1). Soient A et B les deux matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ données par $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

- **(a).** Vérifier que $A^2 = A$ et que $B^2 = B$.
- **(b).** Déterminer le rang de A, ainsi que la dimension du noyau de A.
- **(c).** La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.
- **(d).** En notant I_2 la matrice identité de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{I}_2 - AB$ et que $A + B - AB$ sont inversibles.

(2). Soit $n \geq 2$. On rappelle qu'un projecteur de $\mathbb{R}^n$ est un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $u^2 = u$ où u^2 désigne la composée $u \circ u$. On note Id l'application identité entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$.

Dans cette question, on étudie quelques propriétés générales des projecteurs. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un projecteur. On lui associe l'endomorphisme $\tilde{u}$ défini par $\tilde{u} = \mathrm{Id} - u$.

- **(a).** Montrer que $\tilde{u}$ est un projecteur.
- **(b).** Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,(u) \oplus \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id})$.
  Indication : on pourra écrire $x = x - u(x) + u(x)$.
- **(c).** Montrer que $\mathrm{Ker}\,(\tilde{u}) = \mathrm{Im}\,(u)$ et que $\mathrm{Im}\,(\tilde{u}) = \mathrm{Ker}\,(u)$.
- **(d).** Montrer que $u + \sqrt{2018}\mathrm{Id}$ est diagonalisable.

(3). Soient p et q deux projecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le but de ce qui suite est de démontrer l'équivalence :

$$\begin{array}{lll} (p - q \text{ est inversible}) & \Leftrightarrow & (\mathrm{Id}_{-} p \circ q \text{ et } p + q - p \circ q \text{ sont inversibles}) \\ & \Leftrightarrow & (\mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Im}\,(q) = \mathbb{R}^n \text{ et } \mathrm{Ker}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}\,(q) = \mathbb{R}^n) \end{array}$$

On suppose dans cette question uniquement que $\mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Im}\,(q) = \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{Ker}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}\,(q) = \mathbb{R}^n$.
Montrer alors que $p - q$ est inversible.

(4). On suppose dans cette question uniquement que $p - q$ et inversible.

- **(a).** Montrer que $\mathrm{Id} - p \circ q$ est inversible.
  Indication : on pourra prendre $x \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Id} - p \circ q)$ et calculer $(p - q)^2(x)$.
- **(b).** Posons $\tilde{p} = \mathrm{Id} - p$ et $\tilde{q} = \mathrm{Id} - q$. Justifier que $\tilde{p} - \tilde{q}$ est inversible.
- **(c).** En déduire que $p + q - p \circ q$ est inversible.

(5). On suppose dans cette question que $\mathrm{Id} - p \circ q$ et $p + q - p \circ q$ sont inversibles.

- **(a).** Justifier qu'il existe $z \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\mathrm{Id} = z \circ p + z \circ (\mathrm{Id} - p) \circ q$.
- **(b).** En déduire que $\mathrm{Ker}\,(p) \cap \mathrm{Ker}\,(q) = \{0\}$.
- **(c).** Montrer que $\mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Im}\,(q) = \mathbb{R}^n$.
- **(d).** Montrer que $\mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Im}\,(q) = \mathbb{R}^n$ et que $\mathrm{Ker}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}\,(q) = \mathbb{R}^n$.

Pistes de réflexion

(1). (a). Pas de difficultés particulières.
- **(b).** Même remarque.
- **(c).** On dispose d'un théorème pour les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
- **(d).** On explicite les matrices, puis on étudie leur inversibilité grâce au déterminant.

(2). On montre que $\tilde{u} \circ \tilde{u} = \tilde{u}$.

(3). On remarquera que les deux noyaux sont les sous-espaces propres d'un projecteur. . .

(4). $\mathrm{Im}\,(u)$ et $\mathrm{Ker}\,(u)$ sont bien connus !

(5). On posera $v = u + \sqrt{2018}\mathrm{Id}$ et on remarquera que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\,\left(v - \sqrt{2018}\mathrm{Id}\right) \oplus \mathrm{Ker}\,\left(v - \left(\sqrt{2018}\right)\mathrm{Id}\right)$ à l'aide des questions précédentes pour conclure.

(6). On montrera que $\mathrm{Ker}\,(p - q) = \{0\}$ en utilisant le fait que $\mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Im}\,(q) = \mathbb{R}^n$.

(7). (a). On suit l'indication, puis on utilise le fait que $p - q$ et donc $(p - q)^2$ sont bijectifs pour montrer que le noyau de $\mathrm{Id} - p \circ q$ est réduit à $\{0\}$.
- **(b).** Il y a un lien direct entre $\tilde{p} - \tilde{q}$ et $p - q$.
- **(c).** C'est un question de synthèse. . .

(8). (a). z est la réciproque de l'une deux applications proposées
- **(b).** On utilise la question précdente.
- **(c).** On écrit autrement $p + q - p \circ q$ pour obtenir $p \circ (\mathrm{Id} - q) \circ z + q \circ z = \mathrm{Id}$ ce qui assure la décomposition voulue.
- **(d).** On introduit w la réciproque de l'autre application. . .et on reprend le même travail pour obtenir la somme directe sur les images, et le théorème du rang donnera ensuite le résultat sur les noyaux.

Exercice| [5256] | 2| Suites définies par une intégrale | Extrait ENS 2001 Filière D2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\quad u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x.$

(1). Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

(2). Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)u_{n+2} = (n+1)u_n$

(3). Déduire alors par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1}u_{2n} = \frac{u_1 u_0}{2n+1}$$

Donner alors la limite ℓ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(4). Calculer u_0 et u_1, puis u_2 et u_3.
Montrer alors que la suite de terme général $v_n = \dfrac{u_{2n}}{u_{2n+1}}$ où $n \in \mathbb{N}$ est décroissante, puis qu'elle converge (on ne demande pas sa limite).

Pistes de réflexion

(1). On pourra raisonner directement sur le signe de $\sin^n(x)$ sur l'intervalle d'intégration, puis on étudiera le signe de $u_{n+1} - u_n$ en factorisant judicieusement pour utiliser ensuite la positivité de l'intégrale.

(2). On explicitera u_{n+2} et on remarquera que $\sin^{n+2}(x) = \sin^1(x) \times \sin^{n+1}(x)$ pour faire notre intégration par parties.

(3). La relation précdente permet de raisonner de proche en proche sur la sous-suite des termes d'indices pairs, et des termes d'indices impairs.

(4). Le calcul de u_0 et de u_1 ne pose pas de difficultés, pour la suite, on utilise la relation entre u_{n+2} et u_n. Pour les variations de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pourra penser à étudier le quotient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

Exercice| [5257] | 3| Famille d'intégrales impropres | Extrait ENS 2013 Filière BL

Pour tout réel $r \geq 1$, soit f_r la fonction définie sur $[0;1[$ par : $f_r(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-rx}}{\sqrt{1-x}}$ et on pose : $I(r) = \displaystyle\int_0^1 f_r(x)\,\mathrm{d}x$.

(1). Dresser le tableau de variations de la fonction f_r. Représenter sommairement son graphe pour $r = 8$.

(2). Montrer que $I(r)$ est une intégrale convergente pour tout réel $r \geq 1$.

On écrit dans la suite $I(r) = I_1(r) + I_2(r) + I_3(r)$ avec :

$$I_1(r) = \int_0^{r^{-\frac{2}{3}}} \mathrm{e}^{-rx}\,\mathrm{d}x$$

$$I_2(r) = \int_0^{r^{-\frac{2}{3}}} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right)\mathrm{e}^{-rx}\,\mathrm{d}x$$

$$I_3(r) = \int_{r^{-\frac{2}{3}}}^1 \frac{\mathrm{e}^{-rx}}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

(3). Montrer que quand r tend vers l'infini, on a : $I_1(r) = \dfrac{1}{r}\left(1 + \underset{r\to+\infty}{o}(1)\right)$

(4). Montrer que pour tout réel y strictement compris entre 0 et 1, on peut écrire :

$$1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-y}} \leq 1 + \frac{y}{2\,(1-y)^{\frac{3}{2}}}$$

(5). Montrer que pour tout $r > 1$:

$$0 \leq I_2(r) \leq c_2\left(1 - r^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}} \times \frac{1}{r^{\frac{4}{3}}}$$

où c_2 est une constante dont on précisera la valeur.

(6). Montrer que pour tout $r \geq 1$, on a : $0 \leq I_3(r) \leq c_3\mathrm{e}^{-r^{\frac{1}{3}}}$ où c_3 est une constante dont on précisera la valeur.

(7). En déduire que $I(r)$ est équivalent à $\dfrac{1}{r}$ quand r tend vers $+\infty$.

Pistes de réflexion

(1). On commencera par dériver f_r pour étudier le signe de f_r' et d'en déduire les variations de f_r.

(2). À priori, le seul problème de convergence se pose en 1 et on pourra s'intéresser au préalable à la convergence de la seule intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$.

(3). On procèdera au calcul de $I_1(r)$ dont on mettra le résultat sous une forme permettra d'obtenir la comparaison demandée.

(4). On peut essayer d'obtenir cet encadrement par opérations sur les fonctions, et/ou passer par des études de fonctions, ou penser à l'inégalité des accroissements finis. . .

(5). On utilisera la croissance de l'intégrale.

(6). On utilisera là encore la croissance de l'intégrale, mais il faudra gérer une intégrale impropre. . .

(7). Il reste à déterminer la limite de $rI(r)$ en utilisant les encadrement précédents.