Exercice| [5243] | 1| TSE 2022 Filière BL

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x\mathrm{e}^{x} - \sin(x) - x^2}{\ln(1+x) - x}$.

(1). Déterminer l'ensemble de définition de f.

(2). Donner un développement limité à l'ordre 2 de f en 0.

(3). Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On appelle g ce prolongement par la suite.

(4). Montrer que g est dérivable en 0, et déterminer $g'(0)$.

(5). Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ en 0 au graphe $\mathcal{C}_g$ de g, et préciser les positions relatives de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}_g$.

Pistes de réflexion

(1). Le logarithme et le dénominateur sont clairement à étudier sérieusement.

(2). On fait opérer les règles de calculs sur les développements limités usuels.

(3). Il s'agira de déterminer la limite de f en 0, à l'aide sûrement de la question précdente.

(4). On sait qu'il y a en lien entre dérivabilité et existence de développement limité d'ordre 1...

(5). La position des deux courbes est encore donnée par le développement limité obtenu précédemment.

Exercice| [5244] | 2| TSE 2022 Filière BL

Soit $\alpha > 0$. Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité f_X donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_X(t) = \alpha\left(\mathbb{1}_{[-2;-1]} + \mathbb{1}_{[1;2]}\right)$$

où pour $A \subset \mathbb{R}$, on a : $\mathbb{1}_A(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \notin A \\ 1 & \text{si} \quad t \in A \end{cases}$

(1). Déterminer α.

(2). Déterminer la fonction de répartition de X.

(3). Calculer $\mathbb{P}\left([X \in]-1;2[]\right)$, $\mathbb{P}\left(\left[X = \frac{3}{2}\right]\right)$ et $\mathbb{P}\left(\left[X \in \left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]\right]\right)$.

(4). On pose $Y = \mathrm{e}^{X}$. Déterminer une densité de probabilité de Y.

Pistes de réflexion

(1). On rappelle qu'il faut notamment que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

(2). On déterminera $F_X(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de x en utilisant la définition de f_X qui est donnée par morceaux.

(3). On pourra judicieusement faire intervenir la fonction de répartition de X.

(4). On cherchera un lien entre la fonction de répartition de X et de Y pour obtenir ensuite une densité de Y.

Exercice| [5245] | 3| ENS 2018 Filière D2

Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on dit qu'une matrice est semi-magique lorsque les sommes de coefficients d'une même ligne sont toutes égales entre elles et égales aux sommes des coefficients d'une même colonne. On note alors S_n l'ensemble des matrices semi-magiques de taille n, et on a ainsi la caractérisation suivante :

$$(A = (a_{ij}) \in S_n) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\exists c \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \forall k \in [\![1;n]\!],\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ik} & = & c \\ \forall k \in [\![1;n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj} & = & c \end{cases}\right)$$

(1). On fixe pour cette partie $n = 3$ et on note J la matrice ne contenant que des 1 : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- **(a).** Vérifier que $J \in S_3$. Proposez une matrice $N \notin S_3$.
- **(b).** Soit $M \in S_3$. Montrez qu'il existe un réel a tel que $JM = MJ = aJ$. Quelle est la valeur de a ?
- **(c).** Montrer réciproquement que si est une matrice M vérifie $JM = MJ = aJ$ pour un réel a quelconque alors $M \in S_3$.
- **(d).** Soit $M \in S_3$ inversible. Montrer que $S^{-1} \in S_3$.

(2). On fixe pour cette partie $n = 2$.

- **(a).** Montrer que S_2 est un espace vectoriel.
- **(b).** Proposez une base $\mathcal{B}$ et en déduire une base de cet espace vectoriel.
- **(c).** On définit l'application linéaire f qui à toute matrice $A \in S_2$ associe $\displaystyle\sum_{j=1}^{2} a_{1j}$.

  Quel est le noyau de f ?
- **(d).** Quelle est la matrice F de f dans la base $\mathcal{B}$? Quel est son rang ?

Pistes de réflexion

(1).
- **(a).** Cela reste globalement évident à vérifier...
- **(b).** Il suffit d'expliciter les produits JM et MJ pour justifier l'existence et donner la valeur de a.
- **(c).** Il suffit de s'assurer qu'une telle matrice M est semi-magique.
- **(d).** On multiplie la relation $JM = MJ = aJ$ par M^{-1} pour montrer que M^{-1} vérifie une relation similaire ce qui suffit puisque les questions précédentes caractérisent les éléments de S_3.

(2).
- **(a).** On s'assurera surtout de la stabilité de S_2 par combinaison linéaire.
- **(b).** Le fait que les sommes des lignes et des colonnes sont égales, les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ semblent jouer un grand rôle...
- **(c).** On obtient simplement le noyau en explicitant le fait que $f(M) = (0)$ pour $M \in S_2$.
- **(d).** On calcule les images des vecteurs de la base précédemment trouvée, et le théorème du rang permet de conclure.