### Exercice| [5238] | 1| Extrait EDHEC 2006 Filière ECE

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice $A$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

On pose par ailleurs $u = (2, 1, -2)$.

**(1). (a).** Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(u)$.

**(b).** La matrice $A$ est-elle inversible ?

**(2). (a).** Déterminer le vecteur $v$ de $\mathbb{R}^3$ dont la 2$^e$ coordonnées dans $\mathcal{B}$ vaut 1 et tel que $f(v) = u$.

**(b).** Démontrer que le vecteur $w$ de $\mathbb{R}^3$ dont la 2$^e$ coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1 et qui vérifie $f(w) = v$ et $w = (0, 1, -1)$.

**(c).** Montrer que $(u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathcal{B}'$.
On note alors $P$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Expliciter la matrice $P$.

**(3). (a).** Écrire la matrice $N$ de $f$ relativement à la base $\mathcal{B}'$.

**(b).** Donner la relation liant les matrices $A$, $N$, $P$ et $P^{-1}$.
En déduire que, pour tout entier $k \geq 3$, on a $A^k = (0)$.

**(4). (a).** On note $\mathcal{C}_n$ (respectivement $\mathcal{C}_A$) l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec $N$ (respectivement $A$).

**(i).** Montrer que $\mathcal{C}_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On admet alors qu'il en est de même de $\mathcal{C}_N$.

**(ii).** Montrer que $\mathcal{C}_N = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_3, N, N^2)$.

**(iii).** Établir que : $(M \in \mathcal{C}_A) \quad \Leftrightarrow \quad (P^{-1}MP \in \mathcal{C}_N)$.
En déduire que $\mathcal{C}_A = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_3, A, A^2)$.
Quelle est la dimension de $\mathcal{C}_A$ ?

#### Pistes de réflexion

**(1). (a).** On cherche les éléments du noyau de $u$ en résolvant un système homogène de matrice $A$.

**(b).** Il y a un lien entre l'inversibilité de la matrice $A$ et le caractère bijectif de $f$ que l'on exploitera judicieusement à l'aide de la question précdente.

**(2). (a).** Il s'agira de résoudre un système dont la matrice est $A$ et le second membre est $u$, dont on exploitera les solutions pour expliciter $v$.

**(b).** Il s'agira de résoudre un système dont la matrice est $A$ et le second membre est $v$, dont on exploitera les solutions pour expliciter $v$.

**(c).** On utilisera la caractérisation d'une base par l'inversibilité de sa matrice par exemple, ce qui donnera directement $P$.

**(3). (a).** On calcule les images de $u$, $v$ et $w$ par $f$ que l'on exprime en fonction de $u$, $v$ et $w$.

**(b).** Il s'agit de donner la formule de changement de bases pour les endomorphismes, et de remarquer que les puissances de $N$ sont rapidement nulles.

**(4). (a).** Il s'agira dans un premier temps d'expliciter $\mathcal{C}_A$, puis de s'assurer de sa stabilité par combinaison linéaire.

**(b).** On traduira l'appartenance à $\mathcal{C}_N$ à l'aide d'un système que l'on résoudra pour déterminer des conditions d'appartenance à $\mathcal{C}_N$ qui conduiront à la famille génératrice proposée.

**(c).** Il y a un lien entre $A$ et $N$...et il restera à s'assurer du caractère libre de la famille génératrice de $\mathcal{C}_A$ ou $\mathcal{C}_N$ pour obtenir la dimension de $\mathcal{C}_A$.

### Exercice| [5240] | 2| ENS 2021 Filière D2

On considère l'application $f$ donnée par : $f : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y - z, 3y, -2x + y + 2z) \end{array}$

On rappelle que l'on note $\mathrm{Id}$ l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

**(1). (a).** Montrer que $f$ est une application linéaire.

**(b).** Donner la matrice $M$ associée à $f$ dans $\mathcal{B}$.

**(c).** Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f)$ est une droite vectorielle engendrée par un vecteur $u_1$ que l'on déterminera.
L'application $f$ est-elle injective ?

**(2). (a).** Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$.

**(b).** Montrer que les vecteurs $u_2 = f\,(e_2)$ et $u_3 = f\,(e_3)$ forment une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

**(c).** L'application $f$ est-elle surjective ?

**(3). (a).** Montrer que $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

**(b).** Donner la matrice $D$ de $f$ dans cette base.

**(c).** Donner une matrice $P$ telle que $D = P^{-1}MP$.

**(4). (a).** Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f - 3\mathrm{Id})$.

**(b).** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. à l'aide d'un raisonnement par récurrence, expliciter la matrice associée à l'application $f^n$ dans la base $\mathcal{B}$.

#### Pistes de réflexion

**(1). (a).** On s'assurera que l'image d'une combinaison linéaire de vecteurs par $f$ est la combinaison linéaire des images.

**(b).** Il suffit de déterminer les images par $f$ des vecteurs de la base canonique.

**(c).** On traduira l'appartenance d'un vecteur au noyau sous forme d'un système que l'on résoudra, l'injectivité s'en déduira ensuite.

**(2). (a).** Le théorème du rang donne la réponse directement.

**(b).** Il s'agit d'une famille de deux vecteurs non nuls et non colinéaires d'un espace de dimension...

**(c).** Le caractère surjectif s'en déduit directement.

**(3). (a).** On pourra s'assurer du caractère base en faisant intervenir la matrice de cette famille de vecteurs.

**(b).** On cacule les images par $f$ des vecteurs de la famille $\mathcal{C}$ que l'on exprime ensuite à l'aide des vecteurs de cette même famille.

**(c).** Il s'agit d'une matrice de passage...

**(4). (a).** On pourra raisonner par double inclusion, ou alors chercher une base de $\mathrm{Ker}\,(f - 3\mathrm{Id})$.

**(b).** On pourra utiliser la relation entre $D$ et $P$ précdemment explicitée.

Exercice| [5239] | 3| Extrait TSE 2022 Filière BL

Le but de cet exercice est de déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ en fonction du réel $\alpha$.

**(1).** On suppose $\alpha > 1$. Montrer que la série $\sum \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$ converge.

**(2).** On suppose dans cette question de $\alpha \in \left]\dfrac{1}{2};1\right]$. On définit la fonction $\varphi$ par :

$$\forall t \in [1;+\infty[\,,\ \varphi(t) = \frac{\sin(\pi\sqrt{t})}{t^\alpha}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $u_n = \varphi(n)$ et $v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$

**(a).** Démontrer que pour tout $x > 1$, on a : $\displaystyle\int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\pi y)}{y^{2\alpha-1}}\,\mathrm{d}y$.

**(b).** En déduire que :

$$\int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 2\left(-\frac{\cos(\pi x)}{\pi x^{\alpha-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\pi}\right) - \frac{2(2\alpha-1)}{\pi}\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\pi y)}{y^{2\alpha}}\,\mathrm{d}y$$

**(c).** Démontrer que $\displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \frac{\cos(\sqrt{y})}{y^{2\alpha}}\,\mathrm{d}y$ admet une limite lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**(d).** Démontrer qu'il existe $K > 0$ tel que : $\forall t \geq 1,\ |\varphi'(t)| \leq \dfrac{K}{t^{\alpha+\frac{1}{2}}}$.

**(e).** En déduire que : $\forall (a,b) \in [1;+\infty[^2\,,\ a \leq b,\ |\varphi(a) - \varphi(b)| \leq \dfrac{K}{a^{\alpha+\frac{1}{2}}}\,|a-b|$.

**(f).** Exprimer la somme partielle $V_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n$ à l'aide de l'intégrale de $\varphi$. En déduire la nature de $\sum v_n$.

**(g).** Vérifier que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_n - v_n = \displaystyle\int_n^{n+1} (\varphi(n) - \varphi(t))\,\mathrm{d}t$.

**(h).** Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $|u_n - v_n| \leq \dfrac{K}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$.

En déduire la nature de la série $\sum (u_n - v_n)$.

**(i).** Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Pistes de réflexion

**(1).** On pourra utiliser le théorème de comparaison pour obtenir la convergence absolue, puis la convergence.

**(2).(a).** La contemplation des bornes des deux intégrales nous fait penser à utiliser un changement de variables, tel $y = \sqrt{t}$.

**(b).** Là encore, l'expression à obtenir fait penser à utiliser une intégration par parties.

**(c).** On utilisera le théorème de comparaison pour obtenir la convergence absolue, puis la convergence.

**(d).** Le théorème fondamental de l'analyse donne l'expression de $\varphi'(t)$, puis il suffit de majorer.

**(e).** Cela sent l'inégalité des accroissements finis à plein nez !

**(f).** La relation de Chasles pour les intégrales donne l'expression de $V_N$, et les questions précédentes la limite de la suite des sommes partielles de la série $\sum v_n$.

**(g).** On remarquera que l'on intègre sur un intervalle de longueur $1$ pour faire le lien entre $u_n$ et une intégrale portant sur $\varphi(n)$.

**(h).** Le théorème de comparaison donne là encore la réponse.

**(i).** N'ayant fait aucun calcul à ce stade de ma lecture de l'énoncé. . .je vous laisse voir quelle question vous donne la réponse !